

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	<b>Zasady oceniania rozwiązań zadań</b>
<i>Egzamin:</i>	<b>Egzamin maturalny</b>
<i>Przedmiot:</i>	<b>Fizyka</b>
<i>Poziom:</i>	<b>Poziom rozszerzony</b>
<i>Formy arkusza:</i>	MFAP-R0-100, MFAP-R0-200, MFAP-R0-300, MFAP-R0-400, MFAP-R0-700, MFAP-R0-Q00, MFAP-R0-K00, MFAU-R0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	20 maja 2025 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	27 czerwca 2025 r.

## Ogólne zasady oceniania arkuszy egzaminacyjnych z fizyki

1. Jeżeli zdający poprawnie rozwiązał zadanie (użył poprawnej metody, uwzględnił warunki zadania, otrzymał poprawny wynik) metodą, której nie uwzględniały zasady oceniania (chodzi o jakościowo inną metodę – np. użycie prawa / wzoru / twierdzenia / metody rachunkowej spoza podstawy programowej – a nie metodę równoważną tym w zasadach oceniania), to otrzymuje maksymalną liczbę punktów.
2. Jeżeli zdający poda w wyniku końcowym wartość wielkości fizycznej bez jednostki lub z błędną jednostką, to nie spełnia warunków określonych w zasadach oceniania na maksymalną liczbę punktów.
3. Ocenie podlegają te fragmenty pracy zdającego, które dotyczą polecenia.
4. Jeżeli na pewnym etapie rozwiązania zadania zdający podaje kilka sprzecznych ze sobą rozwiązań i nie wskazuje, które z nich należy uznać za poprawne, to może uzyskać punkty tylko za wcześniejsze poprawne etapy rozwiązania.
5. Jeżeli na pewnym etapie rozwiązania zadania zdający podaje kilka sprzecznych ze sobą rozwiązań i wskazuje, które z nich należy uznać za poprawne, to zapisów w innych rozwiązaniach nie bierze się pod uwagę w ocenianiu.
6. Jeżeli na dowolnym etapie rozwiązania zadania zdający popełnia błąd rachunkowy (albo błąd przepisania wartości z danych albo wcześniejszych etapów rozwiązania), ale stosuje poprawne metody rozwiązania i konsekwentnie doprowadza rozwiązanie zadania do końca, to ocenę rozwiązania obniża się o 1 punkt.
7. Jeżeli w poleceniu jest dyspozycja o zapisaniu wyniku zaokrąglonego do pewnej liczby cyfr znaczących, to oznacza, że wynik musi być podany w postaci rozwinięcia dziesiętnego liczby i z określonym w poleceniu zaokrągleniem. Jeżeli w zadaniu z takim poleceniem zdający przedstawia wynik w postaci ułamka zwykłego, lub w postaci z występującym  $\pi$  lub np.  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  albo podaje wynik ze zbyt dużą lub zbyt małą liczbą cyfr znaczących – to nie otrzymuje maksymalnej liczby punktów.
8. Wszelkie wzory / związki / zależności / relacje między wielkościami mogą być równoważnie zapisane za pomocą symboli lub za pomocą liczb, które to liczby są wartościami wielkości występujących w tych wzorach / związkach / zależnościach / relacjach.
9. Jeżeli w zasadach oceniania danego etapu rozwiązania wymienione jest, że zdający korzysta / uwzględnia / zapisuje dane związki / zależności / prawa / wzory, to mogą być one zapisane oddzielnie, albo nawet w jednym równaniu (o ile to możliwe).

*Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.*

*Gdy wymaganie dotyczy treści szkoły podstawowej, dopisano (SP), a gdy zakresu podstawowego szkoły ponadpodstawowej – dopisano (P).*

### Zadanie 1.1. (0–2)

Wymagania określone w podstawie programowej <sup>1</sup>	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.	Zdający: II.3) opisuje ruchy postępowe, posługując się wielkościami wektorowymi: [...] prędkością i przyspieszeniem [...]; II.7) opisuje ruchy złożone jako sumę ruchów prostych; analizuje rzut poziomy jako przykład ruchu dwuwymiarowego.

### Zasady oceniania

2 pkt – poprawne zaznaczenia w trzech stwierdzeniach.

1 pkt – poprawne zaznaczenia w dwóch stwierdzeniach.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

### Pełne rozwiązanie

FPF

### Zadanie 1.2. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.  V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.	Zdający: II.16) (SP) opisuje spadek swobodny [...]. I.7) wyodrębnia z tekstów, [...] wykresów, [...] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu [...]. II.4) opisuje ruchy prostoliniowe jednostajne i jednostajnie zmienne, posługując się zależnościami położenia, wartości prędkości i przyspieszenia oraz drogi od czasu; II.7) opisuje ruchy złożone jako sumę ruchów prostych; analizuje rzut poziomy jako przykład ruchu dwuwymiarowego.

<sup>1</sup> Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

## Zasady oceniania<sup>2</sup>

(dla rozwiązania sposobem 1. lub sposobem 2.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia  $v_{0B}$  – wartości prędkości początkowej kulki  $K_B$ , tzn. poprawne zastosowanie równań ruchu dla kulek  $K_A$  i  $K_B$  (w układzie inercyjnym) **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką:  $v_{0B} = 16 \text{ m/s}$

2 pkt – zapisanie równania z którego można bezpośrednio obliczyć czas ruchu kulki  $K_A$  od chwili  $t_0$  do chwili  $t_z$  **oraz** zapisanie równania pozwalającego wyznaczyć położenie kulki  $K_A$  wzdłuż osi  $y$  w chwili  $t_z$ , czyli rzędną punktu  $C$  w funkcji położenia początkowego kulki  $K_A$ ,  $g$  i  $t_z$  **oraz** zapisanie równania (albo równań) pozwalającego wyznaczyć położenie kulki  $K_B$  wzdłuż osi  $y$  w chwili  $t_z$ , czyli rzędną punktu  $C$  w funkcji prędkości początkowej  $v_{0B}$  kulki  $K_B$ ,  $g$  i  $t_z$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$6 \text{ m} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t_z \quad \text{oraz} \quad y_C(KA) = 12 - \frac{1}{2}gt_z^2 \quad \text{oraz} \quad y_C(KB) = v_{0B}t_z - \frac{1}{2}gt_z^2$$

albo

$$6 \text{ m} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t_z \quad \text{oraz} \quad y_C(KA) = 12 - \frac{1}{2}gt_z^2 \quad \text{oraz}$$

$$\left( y_C(KB) = \frac{v_{0B} + v_C(KB)}{2} \cdot t_z \quad \text{i} \quad v_C(KB) = v_{0B} - gt_z \right)$$

1 pkt – zastosowanie równania ruchu jednostajnego prostoliniowego dla opisu położenia kulki  $K_A$  wzdłuż osi  $x$ : zapisanie równania z którego można bezpośrednio obliczyć czas ruchu kulki  $K_A$  od chwili  $t_0$  do chwili  $t_z$  zderzenia się kulek, np. zapisy równoważne poniższym:

$$x_C(KA) = x_A(KA) + v_{0A}t_z \quad \text{albo} \quad \Delta x_{(KA)} = v_{0A}t_z \quad \text{albo} \quad t_z = \frac{6 \text{ m}}{8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

### LUB

– zastosowanie równania ruchu jednostajnie przyspieszonego (w stronę przeciwną do zwrotu osi  $y$ ) bez prędkości początkowej dla opisu położenia kulki  $K_A$  wzdłuż osi  $y$ : zapisanie równania pozwalającego wyznaczyć rzędną punktu  $C$  w funkcji położenia początkowego kulki  $K_A$ ,  $g$  i  $t_z$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$y_C(KA) = 12 - \frac{1}{2}gt_z^2$$

### LUB

– zastosowanie równania (albo równań) ruchu jednostajnie opóźnionego (w stronę zwrotu osi  $y$ ) dla opisu położenia kulki  $K_B$  wzdłuż osi  $y$ : zapisanie równania pozwalającego wyznaczyć rzędną punktu  $C$  w funkcji prędkości początkowej  $v_{0B}$  kulki  $K_B$ ,  $g$  i  $t_z$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$y_C(KB) = v_{0B}t_z - \frac{1}{2}gt_z^2 \quad \text{albo} \quad \left( y_C(KB) = \frac{v_{0B} + v_C(KB)}{2} \cdot t_z \quad \text{i} \quad v_C(KB) = v_{0B} - gt_z \right)$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

<sup>2</sup> Pod opisem warunków za przyznanie punktów, w niektórych przypadkach podano przykładowe zapisy (lub przykładowe zapisy równoważne), które spełniają te warunki w minimalnym stopniu.

**Zasady oceniania**

(dla rozwiązania sposobem 3. lub sposobem 4.)

Rozwiązanie będzie podlegało ocenie, gdy zdający spełni co najmniej jeden z poniższych warunków lub ich kombinację, określoną dalej w schemacie punktowania.

**Warunek PRĘDKOŚĆ\_WZGLĘDNA**

Zauważenie, że ruch kulki  $K_B$  względem kulki  $K_A$  jest jednostajny prostoliniowy **oraz** określenie współrzędnych (może być co do wartości bezwzględnej) prędkości względnej kulki  $K_B$  względem kulki  $K_A$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$v_{BAx} = -8 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_{BAy} = v_{0B} \quad \text{albo} \quad \vec{v}_{BA} = \left[ -8 \frac{\text{m}}{\text{s}}; v_{0B} \right]$$

albo opisowo

*prędkość w poziomie kulki  $K_B$  względem  $K_A$  jest skierowana w lewo i ma stałą wartość 8 m/s  
prędkość w pionie kulki  $K_B$  względem  $K_A$  jest skierowana w górę i ma stałą wartość  $v_{0B}$*

**Warunek PRZEMIESZCZENIE\_WZGLĘDNE**

Zauważenie, że ruch kulki  $K_B$  względem kulki  $K_A$  jest jednostajny prostoliniowy **oraz** określenie współrzędnych (może być co do wartości bezwzględnej) przemieszczenia względnego kulki  $K_B$  względem kulki  $K_A$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$\Delta x_{BA} = -6 \text{ m}, \quad \Delta y_{BA} = 12 \text{ m} \quad \text{albo} \quad \Delta \vec{r}_{BA} = [-6 \text{ m}; 12 \text{ m}]$$

albo opisowo

*przemieszczenie w poziomie kulki  $K_B$  względem  $K_A$  jest w lewo i ma wartość 6 m  
przemieszczenie w pionie kulki  $K_B$  względem  $K_A$  jest w górę i ma wartość 12 m*

**Warunek PRĘDKOŚĆ\_W\_NU**

Zauważenie, że w nieinercyjnym układzie odniesienia ( $NU$ ) swobodnie spadającym pionowo (od chwili  $t_0$ ) ruch obu kulek jest jednostajny prostoliniowy **oraz** określenie prędkości obu kulek w tym układzie  $NU$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$\vec{v}_{A_{NU}} = [v_{Ax_{NU}}; v_{Ay_{NU}}] = \left[ 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}; 0 \right] \quad \vec{v}_{B_{NU}} = [v_{Bx_{NU}}; v_{By_{NU}}] = [0; v_{0B}]$$

albo opisowo

*kulka  $K_A$  porusza się w spadającym układzie  $NU$  w prawo z prędkością 8 m/s  
kulka  $K_B$  porusza się w spadającym układzie  $NU$  w górę z prędkością  $v_{0B}$*

**Warunek PRZEMIESZCZENIE\_W\_NU**

Zauważenie, że w nieinercyjnym układzie odniesienia ( $NU$ ) swobodnie spadającym pionowo (od chwili  $t_0$ ) ruch obu kulek jest jednostajny prostoliniowy **oraz** określenie przemieszczenia obu kulek w tym układzie  $NU$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$\Delta \vec{r}_{A_{NU}} = [\Delta x_{A_{NU}}; \Delta y_{A_{NU}}] = [6 \text{ m}; 0] \quad \Delta \vec{r}_{B_{NU}} = [\Delta x_{B_{NU}}; \Delta y_{B_{NU}}] = [0; 12 \text{ m}]$$

albo opisowo

*kulka  $K_A$  w spadającym układzie  $NU$  przemieszcza się 6 m w prawo  
kulka  $K_B$  w spadającym układzie  $NU$  przemieszcza się 12 m w górę*

**Schemat punktowania (dla rozwiązania sposobem 3. lub sposobem 4.)**

3 pkt – poprawna metoda obliczenia  $v_{0B}$  – wartości prędkości początkowej kulki  $K_B$ , tzn. poprawne zastosowanie równań ruchu dla kulek  $K_A$  i  $K_B$  (w układzie spoczynkowym kulki  $K_A$  lub w układzie swobodnie spadającym pionowo) **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką:  $v_{0B} = 16 \text{ m/s}$

2 pkt – spełnienie warunku **PRĘDKOŚĆ\_WZGLĘDNA** **oraz** warunku **PRZEMIESZCZENIE\_WZGLĘDNE** **oraz** zastosowanie związków między przemieszczeniem względnym a prędkością względną kulki  $K_B$  względem kulki  $K_A$  (w obu kierunkach: poziomym i pionowym) i czasem ruchu do zderzenia kulek, np. zapisy równoważne poniższym:

$$6 \text{ m} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t_z \quad \text{oraz} \quad 12 \text{ m} = v_{0B} \cdot t_z$$

**LUB**

– spełnienie warunku **PRĘDKOŚĆ\_W\_NU** **oraz** warunku **PRZEMIESZCZENIE\_W\_NU** **oraz** zastosowanie związków między przemieszczeniem a prędkością i czasem (ruchu do zderzenia kulek) dla ruchu obu kulek w spadającym układzie odniesienia  $NU$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$6 \text{ m} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t_z \quad \text{oraz} \quad 12 \text{ m} = v_{0B} \cdot t_z$$

1 pkt – spełnienie warunku **PRĘDKOŚĆ\_WZGLĘDNA**

**LUB**

– spełnienie warunku **PRZEMIESZCZENIE\_WZGLĘDNE**

**LUB**

– spełnienie warunku **PRĘDKOŚĆ\_W\_NU**

**LUB**

– spełnienie warunku **PRZEMIESZCZENIE\_W\_NU**

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Zasady oceniania**

(dla rozwiązania sposobem 5.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia  $v_{0B}$  – wartości prędkości początkowej kulki  $K_B$ , tzn. poprawne zastosowanie zasady zachowania energii dla kulek  $K_A$  i  $K_B$  (w układzie inercyjnym) **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką:

$$v_{0B} = 16 \text{ m/s}$$

2 pkt – zapisanie równania z którego można bezpośrednio obliczyć czas ruchu kulki  $K_A$  od chwili  $t_0$  do chwili  $t_z$  **oraz** zapisanie zasady zachowania energii dla kulki  $K_A$  w punktach  $A$  i  $C$  z uwzględnieniem wzoru z czasem na prędkość kulki  $K_A$  w punkcie  $C$ , **oraz** zapisanie zasady zachowania energii dla kulki  $K_B$  w punktach  $B$  i  $C$  z uwzględnieniem wzoru z czasem na prędkość kulki  $K_B$  w punkcie  $C$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$6 \text{ m} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t_z \quad \text{oraz}$$

$$\frac{mv_{0A}^2}{2} + mgh_A = \frac{m(v_{0A}^2 + (gt_z)^2)}{2} + mgy_C \quad \text{oraz}$$

$$\frac{mv_{0B}^2}{2} = \frac{m(v_{0B} - gt_z)^2}{2} + mgy_C$$

1 pkt – zastosowanie równania ruchu jednostajnego prostoliniowego dla opisu położenia kulki  $K_A$  wzdłuż osi  $x$ : zapisanie równania z którego można bezpośrednio obliczyć czas ruchu kulki  $K_A$  od chwili  $t_0$  do chwili  $t_z$  zderzenia się kulek, np. zapisy równoważne poniższym:

$$x_C(K_A) = x_A(K_A) + v_{0A}t_z \quad \text{albo} \quad \Delta x_{(KA)} = v_{0A}t_z \quad \text{albo} \quad t_z = \frac{6 \text{ m}}{8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

**LUB**

– zapisanie zasady zachowania energii dla kulki  $K_A$  w punktach  $A$  i  $C$  **oraz** uwzględnienie wzoru z czasem na prędkość kulki  $K_A$  w punkcie  $C$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{mv_{0A}^2}{2} + mgh_A = \frac{m(v_{0A}^2 + (gt_z)^2)}{2} + mgy_C$$

**LUB**

– zapisanie zasady zachowania energii dla kulki  $K_B$  w punktach  $B$  i  $C$  **oraz** uwzględnienie wzoru z czasem na prędkość kulki  $K_B$  w punkcie  $C$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{mv_{0B}^2}{2} = \frac{m(v_{0B} - gt_z)^2}{2} + mgy_C$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązania<sup>3</sup>

#### Sposób 1. (zastosowanie kinematycznych równań ruchu w układzie inercyjnym)

Ruch kulki  $K_A$  jest złożeniem ruchu jednostajnego prostoliniowego wzdłuż osi  $x$  i spadku swobodnego wzdłuż osi  $y$ . Zatem współrzędna prędkości kulki  $K_A$  wzdłuż osi  $x$  jest stała:

$$v_x = v_{0A}$$

Obliczymy czas  $t_z$ , mierzony od chwili  $t_0$ , po którym dochodzi do zderzenia kulek. Kulki zderzają się w punkcie  $C$  w chwili  $t_z$ . Z równania ruchu jednostajnego prostoliniowego wynika, że współrzędna  $x$  położenia kulki  $K_A$  w punkcie  $C$  w chwili  $t_z$  dana jest wzorem:

$$x_C(K_A) = x_A(K_A) + v_{0A}t_z \quad \text{zatem} \quad t_z = \frac{x_C(K_A) - x_A(K_A)}{v_{0A}} = \frac{6 \text{ m} - 0 \text{ m}}{8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,75 \text{ s}$$

Współrzędna  $y$  położenia kulki  $K_A$  w chwili zderzenia w  $C$  – zgodnie z równaniem ruchu jednostajnie przyspieszonego bez prędkości początkowej (ruchu w przeciwną stronę do zwrotu osi  $y$ ) – dana jest wzorem:

$$y_C(K_A) = y_A(K_A) - |\Delta y_{(KA)}| = 12 \text{ m} - \frac{1}{2}gt_z^2$$

<sup>3</sup> Przykładowe rozwiązania mogą zawierać dodatkowe wyjaśnienia/komentarze, które nie podlegają ocenie. Wymagane elementy rozwiązania zdającego podlegające ocenie są wyszczególnione i opisane w kryteriach punktacji zasad oceniania. Dodatkowe komentarze w rozwiązaniu zamieszczono w celach dydaktycznych.

Ruch kulki  $K_B$  jest rzutem pionowym w górę z prędkością początkową  $v_{0B}$ . Współrzędna  $y$  położenia kulki  $K_B$  w chwili zderzenia w  $C$  – zgodnie z równaniem ruchu jednostajnie opóźnionego – dana jest wzorem:

$$y_{C(KB)} = v_{0B}t_z - \frac{1}{2}gt_z^2$$

Porównamy ze sobą dwa powyższe wyrażenia opisujące rzędną punktu  $C$ :

$$12 \text{ m} - \frac{1}{2}gt_z^2 = v_{0B}t_z - \frac{1}{2}gt_z^2 \quad \rightarrow \quad 12 \text{ m} = v_{0B}t_z$$

Obliczymy  $v_{0B}$ :

$$v_{0B} = \frac{12 \text{ m}}{0,75 \text{ s}} = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### Sposób 2. (zastosowanie kinematycznych równań ruchu w układzie inercyjnym)

Obliczymy czas  $t_z$ , mierzony od chwili  $t_0$ , po którym dochodzi do zderzenia kulek. Kulki zderzają się w punkcie  $C$ . Ruch kulki  $K_A$  jest złożeniem ruchu jednostajnego prostoliniowego wzdłuż osi  $x$  i spadku swobodnego wzdłuż osi  $y$ . Przemieszczenie  $\Delta x_{(KA)}$  kulki  $K_A$  wzdłuż  $x$  w czasie  $t_z$  dane jest wzorem:

$$\Delta x_{(KA)} = v_x t_z = v_{0A} t_z \quad \text{zatem} \quad t_z = \frac{\Delta x_{(KA)}}{v_{0A}} = \frac{6 \text{ m}}{8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,75 \text{ s}$$

Obliczymy współrzędną  $y$  położenia kulki  $K_A$  w chwili zderzenia w  $C$ . Wykorzystamy równanie ruchu jednostajnie przyspieszonego (w przeciwną stronę do zwrotu osi  $y$ ) bez prędkości początkowej:

$$y_{C(KA)} = y_{A(KA)} - |\Delta y_{(KA)}| = 12 - \frac{1}{2}gt_z^2 \quad \rightarrow$$

$$y_{C(KA)} = 12 \text{ m} - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,75^2 \text{ s}^2 \approx 9,24 \text{ m}$$

Obliczymy prędkość początkową kulki  $K_B$ . Ruch kulki  $K_B$  jest rzutem pionowym w górę z prędkością początkową  $v_{0B}$ . Wykorzystamy równanie ruchu jednostajnie opóźnionego:

$$y_{C(KB)} = v_{0B}t_z - \frac{1}{2}gt_z^2 \quad \text{oraz} \quad y_{C(KA)} = y_{C(KB)} \quad \rightarrow$$

$$9,24 \text{ m} = v_{0B} \cdot 0,75 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,75^2 \text{ s}^2 \quad \rightarrow$$

$$v_{0B} \approx 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### Sposób 3. (zastosowanie równań opisujących ruch kulki $K_B$ względem kulki $K_A$ )

Zapišemy wektorowe równania ruchu dla prędkości kulek  $K_A$  i  $K_B$  względem ziemi.

Równania te rozpiszemy na współrzędne prędkości  $v_x$  oraz  $v_y$  (wektor przyspieszenia ziemskiego jest zwrócony przeciwnie do zwrotu osi  $y$ , zatem jego współrzędna jest ujemna):

$$\vec{v}_A(t) = \vec{v}_{0A} + \vec{g}t \quad \rightarrow \quad \vec{v}_A(t) = [v_{Ax}(t); v_{Ay}(t)] = [v_{0A}; -gt]$$

$$\vec{v}_B(t) = \vec{v}_{0B} + \vec{g}t \quad \rightarrow \quad \vec{v}_B(t) = [v_{Bx}(t); v_{By}(t)] = [0; v_{0B} - gt]$$



Obliczymy prędkość kulki  $K_B$  w układzie odniesienia kulki  $K_A$ , czyli obliczymy prędkość względną kulek. Następnie wyrazimy tę prędkość względną we współrzędnych:

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B(t) - \vec{v}_A(t) = [0 - v_{0A}; (v_{0B} - gt) - (-gt)]$$

$$\vec{v}_{BA} = [v_{BAx}; v_{BAy}] = [-v_{0A}; v_{0B}] = \left[-8 \frac{\text{m}}{\text{s}}; v_{0B}\right]$$

W związku z powyższym kulka  $K_B$  porusza się w układzie odniesienia kulki  $K_A$  ze stałą prędkością, której współrzędna pozioma wynosi  $(-8 \text{ m/s})$  a pionowa  $v_{0B}$ . Z drugiej strony wektor przemieszczenia  $\Delta \vec{r}_{AB}$  (do momentu zderzenia kulek) kulki  $K_B$  w układzie odniesienia kulki  $K_A$  ma współrzędne:

$$\Delta \vec{r}_{BA} = [\Delta x_{BA}; \Delta y_{BA}] = [-6 \text{ m}; 12 \text{ m}]$$

Powyższe oznacza, że kulka  $K_B$  porusza się względem  $K_A$  po skosie do momentu zderzenia: 6 m w lewo i 12 m w górę. Zastosujemy równanie ruchu jednostajnego w wersji wektorowej:

$$\Delta \vec{r}_{BA} = \vec{v}_{BA} t_z \quad \rightarrow \quad [-6 \text{ m}; 12 \text{ m}] = \left[-8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t_z; v_{0B} \cdot t_z\right]$$

Równanie to rozpiszemy na współrzędne:

$$6 \text{ m} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t_z \quad \text{oraz} \quad 12 \text{ m} = v_{0B} \cdot t_z \quad \rightarrow \quad \frac{6 \text{ m}}{12 \text{ m}} = \frac{8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{v_{0B}} \quad \rightarrow \quad v_{0B} = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

#### Sposób 4. (zastosowanie równań ruchu kulki $K_A$ i kulki $K_B$ w układzie odniesienia, który spada swobodnie)

Rozważmy ruch obu kulek w nieinercyjnym, swobodnie spadającym pionowo układzie odniesienia  $NU$ . Załóżmy dalej, że układ  $NU$  rozpoczął spадanie w chwili  $t_0$  – tej samej chwili, w której rzucono kulkę  $K_A$ .

Zauważmy, że układ odniesienia  $NU$  spada w z takim samym przyspieszeniem ziemskim skierowanym w dół, z jakim poruszają się kulki  $K_A$  i  $K_B$ . W związku z tym, przyspieszenia obu kulek względem spadającego układu  $NU$  wynoszą zero.

Ponieważ przyspieszenia kulek w spadającym układzie odniesienia  $NU$  wynoszą zero, to kulki poruszają się w tym układzie  $NU$  ruchem jednostajnym prostoliniowym (mówimy, że względem układu  $NU$  kulki są w stanie nieważkości, jak np. w spadającej swobodnie windzie).

Zanotujmy ważne wnioski wynikające z powyższego rozważania:

- Ponieważ układ odniesienia  $NU$  rozpoczął spадanie w tej samej chwili  $t_0$  co kulka  $K_A$  i spada razem z nią, to prędkość kulki  $K_A$  w  $NU$  ma tylko składową poziomą, równą prędkości początkowej  $K_A$  względem ziemi (pionowa składowa prędkości wynosi zero):

$$\vec{v}_{(KA)_{NU}} = \left[8 \frac{\text{m}}{\text{s}}; 0\right]$$

- Prędkość kulki  $K_B$  w  $NU$  ma tylko składową pionową, równą prędkości początkowej kulki  $K_B$  względem ziemi (pozioma składowa tej prędkości wynosi zero):

$$\vec{v}_{(KB)_{NU}} = [0; v_{0B}]$$

- Do momentu zderzenia kulka  $K_A$  przebywa w układzie odniesienia  $NU$  drogę (w poziomie) równą  $\Delta x_{(KA)_{NU}} = 6 \text{ m}$ , a kulka  $K_B$  przebywa w układzie odniesienia  $NU$  drogę (w pionie) równą  $\Delta y_{(KB)_{NU}} = 12 \text{ m}$ .

Z własności ruchu jednostajnego prostoliniowego (w układzie odniesienia  $NU$ ) otrzymujemy:

$$t_{Az} = t_{Bz} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta x_{(KA)_{NU}}}{v_{(KA)_{NU}}} = \frac{\Delta y_{(KB)_{NU}}}{v_{(KB)_{NU}}}$$

$$\frac{6 \text{ m}}{8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{12 \text{ m}}{v_{0B}} \quad \rightarrow \quad v_{0B} = 16 \text{ m/s}$$

Sposób 5. (rozwiązanie z zastosowaniem zasady zachowania energii mechanicznej)

Zapiszemy zasadę zachowania energii dla kulki  $K_A$  w punktach  $A$  i  $C$  oraz uwzględnimy wzór na prędkość kulki  $K_A$  w punkcie  $C$ :

$$\frac{mv_{0A}^2}{2} + mgh_A = \frac{mv_{(KA)C}^2}{2} + mgy_C \quad \text{gdzie} \quad v_{(KA)C}^2 = v_{0A}^2 + (gt_z)^2$$

Zapiszemy zasadę zachowania energii dla kulki  $K_B$  w punktach  $B$  i  $C$  oraz uwzględnimy wzór na prędkość kulki  $K_B$  w punkcie  $C$ :

$$\frac{mv_{0B}^2}{2} = \frac{mv_{(KB)C}^2}{2} + mgy_C \quad \text{gdzie} \quad v_{(KB)C} = v_{0B} - gt_z$$

Wyznamy  $t_z$  z wartości poziomych składowych prędkości i przemieszczenia kulki  $K_A$ :

$$t_z = \frac{\Delta x_{(KA)}}{v_{0A}} = \frac{6 \text{ m}}{8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,75 \text{ s}$$

Zapiszemy układ równań wynikający z powyższych zależności:

$$\begin{cases} \frac{mv_{0A}^2}{2} + mgh_A = \frac{m(v_{0A}^2 + (gt_z)^2)}{2} + mgy_C \\ \frac{mv_{0B}^2}{2} = \frac{m(v_{0B} - gt_z)^2}{2} + mgy_C \\ t_z = 0,75 \text{ s} \end{cases}$$

Rozwiążemy powyższy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{mv_{0A}^2}{2} + mgh_A = \frac{m(v_{0A}^2 + (gt_z)^2)}{2} + \frac{mv_{0B}^2}{2} - \frac{m(v_{0B} - gt_z)^2}{2} \rightarrow \\ t_z = 0,75 \text{ s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{v_{0A}^2}{2} + gh_A = \frac{v_{0A}^2}{2} + \frac{(gt_z)^2}{2} + \frac{v_{0B}^2}{2} - \frac{v_{0B}^2 - 2v_{0B}gt_z + (gt_z)^2}{2} \rightarrow \\ t_z = 0,75 \text{ s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{v_{0A}^2}{2} + gh_A = \frac{v_{0A}^2}{2} + \frac{(gt_z)^2}{2} + \frac{v_{0B}^2}{2} - \frac{v_{0B}^2}{2} + v_{0B}gt_z - \frac{(gt_z)^2}{2} \rightarrow \\ t_z = 0,75 \text{ s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_A = v_{0B}t_z \\ t_z = 0,75 \text{ s} \end{cases} \quad \rightarrow \quad v_{0B} = \frac{h_A}{t_z} = \frac{12 \text{ m}}{0,75 \text{ s}} = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Zadanie 2.1. (0–2)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.</p> <p>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.</p>	<p>Zdający:</p> <p>III.2) stosuje pojęcie bryły sztywnej; opisuje ruch obrotowy bryły sztywnej wokół osi;</p> <p>III.4) [...] posługuje się pojęciami [...] momentu bezwładności jako wielkości zależnej od rozkładu mas, wraz z ich jednostkami;</p> <p>III.5) [...] oblicza energię ruchu bryły sztywnej jako sumę energii kinetycznej ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego wokół osi przechodzącej przez środek masy.</p> <p>II.20) [...] wykorzystuje [...] zasadę zachowania energii mechanicznej do obliczeń.</p>

**Zasady oceniania**

2 pkt – poprawne zaznaczenia w trzech stwierdzeniach.

1 pkt – poprawne zaznaczenia w dwóch stwierdzeniach.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

**Pełne rozwiązanie**

PPF

**Zadanie 2.2. (0–4)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.</p> <p>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.</p>	<p>Zdający:</p> <p>II.12) wyznacza graficznie siłę wypadkową dla sił działających w dowolnych kierunkach [...];</p> <p>II.13) stosuje zasady dynamiki do opisu zachowania się ciał;</p> <p>II.23) opisuje ruch ciał na równi pochyłej.</p> <p>III.2) stosuje pojęcie bryły sztywnej; opisuje ruch obrotowy bryły sztywnej wokół osi;</p> <p>III.4) stosuje zasady dynamiki dla ruchu obrotowego; posługuje się pojęciami przyspieszenia kąowego oraz momentu bezwładności jako wielkości zależnej od rozkładu mas, wraz z ich jednostkami.</p> <p><i>ALBO</i></p> <p>II.20) [...] wykorzystuje [...] zasadę zachowania energii mechanicznej do obliczeń.</p> <p>III.5) [...] oblicza energię ruchu bryły sztywnej jako sumę energii kinetycznej ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego wokół osi przechodzącej przez środek masy.</p>

## Zasady oceniania

(dla rozwiązania sposobem 1.)

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wartości  $a$  przyspieszenia liniowego walca W2 poprzez  $g$ ,  $\beta$  i  $k_2$  **oraz** zapisanie prawidłowej postaci wzoru na  $a$ :

$$a = \frac{\sin \beta}{1 + k_2} g$$

3 pkt – poprawne zapisanie dwóch równań ruchu wyrażających II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego i ruchu obrotowego (względem osi symetrii) walca W2 **oraz** uwzględnienie w tych równaniach poprawnych wyrażeń opisujących wartość siły wypadkowej działającej na walec W2 i wartość momentu siły działającego na W2, **oraz** uwzględnienie związku między przyspieszeniem liniowym a przyspieszeniem kątowym i wzoru na moment bezwładności walca W2, **oraz** uwzględnienie (zob. uwaga poniżej) warunku, że siła tarcia nie osiągnęła wartości maksymalnej, np. zapisy równoważne poniższym:

$$ma = mg \sin \beta - T \quad \text{oraz} \quad k_2 m R^2 \frac{a}{R} = RT$$

**Uwaga!** Spełnienie ostatniego warunku (po trzecim „oraz”) oznacza pozostawienie wartości siły tarcia  $T$  jako niewiadomej w układzie równań. Zdający nie spełnia powyższego kryterium, jeśli zapisze  $T = \mu mg \cos \beta$ .

### LUB

– wyprowadzenie (z dynamicznych równań ruchu) i zapisanie prawidłowej postaci wzoru na  $a$ , **pomimo** błędnego określenia siły tarcia, jako takiej, która osiągnęła wartość maksymalną (tzn. z jednym błędnym zapisem:  $T = \mu mg \cos \beta$ ), np.:

$$(\text{równania ruchu z błędnym zapisem } T = \mu mg \cos \beta) \quad \rightarrow \quad a = \frac{\sin \beta}{1 + k_2} g$$

2 pkt – poprawne zapisanie dwóch równań ruchu wyrażających II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego i ruchu obrotowego (względem osi symetrii) walca W2 **oraz** uwzględnienie w tych równaniach poprawnych wyrażeń opisujących wartość siły wypadkowej działającej na walec W2 **oraz** wartość momentu siły działającego na W2, np. zapisy równoważne poniższym:

$$(ma = mg \sin \beta - T \quad \text{oraz} \quad I_2 \epsilon = RT)$$

albo

$$(ma = Q_{\parallel} - T \quad \text{oraz} \quad I_2 \epsilon = RT)$$

1 pkt – zapisanie dwóch równań ruchu wyrażających II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego i ruchu obrotowego (względem osi symetrii) walca W2 (bez poprawnego rozpisania  $F_w$  i  $M_T$ ), np. zapisy równoważne poniższym:

$$(ma = F_w \quad \text{oraz} \quad I_2 \epsilon = M_T)$$

### LUB

– zapisanie poprawnego wzoru na wartość siły wypadkowej działającej na walec W2 **oraz** zapisanie poprawnego wzoru na moment siły tarcia działający na walec W2, np. zapisy równoważne poniższym:

$$F_w = Q_{\parallel} - T \quad \text{oraz} \quad M_T = RT$$

### LUB

- poprawne zapisanie równania ruchu wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego walca W2 **oraz** uwzględnienie w tym równaniu poprawnego wyrażenia opisującego wartość siły wypadkowej działającej na walec W2, np. zapisy równoważne poniższym:

$$ma = Q_{\parallel} - T$$

**LUB**

- poprawne zapisanie równania ruchu wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego walca W2 względem osi symetrii, **oraz** uwzględnienie w tym równaniu poprawnego wyrażenia opisującego wartość momentu siły działającego na W2, np. zapisy równoważne poniższym:

$$I_2 \epsilon = RT$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Zasady oceniania

(dla rozwiązania sposobem 2.)

- 4 pkt – poprawna metoda (zastosowanie zasady zachowania energii) wyznaczenia wartości  $a$  przyspieszenia liniowego walca W2 poprzez  $g$ ,  $\beta$  i  $k_2$  **oraz** zapisanie prawidłowej postaci wzoru na  $a$ :

$$a = \frac{\sin \beta}{1 + k_2} g$$

- 3 pkt – poprawna metoda wyznaczenia przyspieszenia liniowego walca z zasady zachowania energii, tzn. spełnienie warunków za 2 pkt **oraz** zastosowanie wzoru na moment bezwładności walca, **oraz** zastosowanie związku między prędkością a przyspieszeniem i drogą (z wyeliminowanym czasem) w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej, np. zapisy równoważne poniższym:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k_2mR^2\frac{v^2}{R^2} \quad \text{oraz} \quad v^2 = 2as$$

albo

$$gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}k_2v^2 \quad \text{oraz} \quad v^2 = 2as$$

- 2 pkt – poprawne zapisanie równania wynikającego z zasady zachowania energii mechanicznej **oraz** poprawne zastosowanie wzorów na energię kinetyczną ruchu postępowego walca W2, energię kinetyczną ruchu obrotowego walca W2 i energię potencjalną walca W2, **oraz** zastosowanie związku między prędkością kątową walca a prędkością liniową walca, np. zapisy równoważne poniższym:

$$(mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_2\omega^2 \quad \text{oraz} \quad v = \omega R) \quad \text{albo} \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_2\frac{v^2}{R^2}$$

- 1 pkt – poprawne zapisanie równania wynikającego z zasady zachowania energii mechanicznej **oraz** uwzględnienie (poprzez oznaczenie) w tym równaniu energii kinetycznych ruchu postępowego walca W2, ruchu obrotowego walca W2 i energii potencjalnej walca W2, np. zapisy równoważne poniższym:

$$E_{\text{pot wal}} = E_{\text{kin wal post}} + E_{\text{kin wal obr}}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

## Zasady oceniania

(dla rozwiązania sposobem 3.)

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wartości  $a$  przyspieszenia liniowego walca W2 poprzez  $g$ ,  $\beta$  i  $k_2$  **oraz** zapisanie prawidłowej postaci wzoru na  $a$ :

$$a = \frac{\sin \beta}{1 + k_2} g$$

3 pkt – poprawne zapisanie równania ruchu wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego walca W2 względem chwilowej osi obrotu **oraz** uwzględnienie w tym równaniu poprawnego wyrażenia (z kątem  $\beta$ ) opisującego moment siły działający na W2 (względem chwilowej osi obrotu), **oraz** uwzględnienie związku między przyspieszeniem liniowym a przyspieszeniem kątowym, **oraz** uwzględnienie związku między  $I_{chw}$  a  $I_2$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$I_{chw}\epsilon = R \cdot mg \sin \beta \quad \text{oraz} \quad \epsilon = \frac{a}{R} \quad \text{oraz} \quad I_{chw} = I_2 + mR^2$$

albo (w jednym równaniu)

$$(I_2 + mR^2) \frac{a}{R} = R \cdot mg \sin \beta$$

2 pkt – poprawne zapisanie równania ruchu wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego walca W2 względem chwilowej osi obrotu **oraz** uwzględnienie w tym równaniu poprawnego wyrażenia (z kątem  $\beta$ ) opisującego moment siły działający na W2 (względem chwilowej osi obrotu) **oraz** uwzględnienie (np. poprzez oznaczenie), że moment bezwładności walca względem chwilowej osi obrotu jest różny od  $I_2$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$I_{chw}\epsilon = R \cdot mg \sin \beta$$

1 pkt – poprawne zapisanie równania ruchu (z oznaczeniem momentu siły ciężkości) wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego walca względem chwilowej osi obrotu (oś chwilowa musi być zidentyfikowana) **oraz** uwzględnienie (np. poprzez oznaczenie), że moment bezwładności walca względem chwilowej osi obrotu jest różny od  $I_2$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$I_{chw}\epsilon = M_Q$$

**LUB**

– zapisanie poprawnego wzoru na moment siły względem chwilowej osi obrotu (ta oś chwilowa musi być zidentyfikowana) **oraz** poprawna identyfikacja siły, która powoduje moment względem chwilowej osi obrotu, np. zapisy równoważne poniższym:

$$M_Q = R \cdot Q_{\parallel} \quad \text{albo} \quad M_Q = R \cdot mg \sin \beta$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

## Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (zastosowanie zasad dynamiki)

Na walec W2 działają trzy siły: siła tarcia statycznego  $\vec{T}$  oraz siła reakcji równi  $\vec{F}_r$  oraz siła ciężkości walca  $\vec{Q}$ . Wypadkowa ze wszystkich sił działających na walec ma kierunek wzdłuż równi i wartość opisaną wyrażeniem:

$$F_w = mg \sin \beta - T$$

Jedynie siła tarcia statycznego ma niezerowy moment względem osi obrotu walca W2:

$$M_T = RT$$

Zapiszemy równania wynikające z II zasady dynamiki dla ruchu postępowego walca W2 oraz dla ruchu obrotowego walca W2 (względem osi symetrii):

$$\begin{cases} ma = mg \sin \beta - T \\ I_2 \epsilon = RT \end{cases}$$

Siła tarcia statycznego nie osiągnęła wartości maksymalnej, zatem pozostaje niewiadomą w powyższym układzie równań. Zastosujemy związek  $a = \epsilon R$  między przyspieszeniem liniowym a przyspieszeniem kątowym (w przypadku toczenia się bez poślizgu) oraz wzór na moment bezwładności walca W2:

$$\begin{aligned} \begin{cases} ma = mg \sin \beta - T \\ k_2 m R^2 \frac{a}{R} = RT \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} ma = mg \sin \beta - T \\ k_2 ma = T \end{cases} \rightarrow \\ \begin{cases} ma = mg \sin \beta - k_2 ma \\ k_2 ma = T \end{cases} &\rightarrow a + k_2 a = g \sin \beta \\ a = \frac{\sin \beta}{1 + k_2} g \end{aligned}$$

### Sposób 2. (zastosowanie zasady zachowania energii mechanicznej)

Zgodnie z przyjętym modelem zjawiska energia mechaniczna pozostaje stała podczas ruchu walca – siły oporów pomijamy, a siła tarcia statycznego nie zmienia całkowitej energii kinetycznej (prace siły tarcia statycznego i momentu siły tarcia statycznego znoszą się).

W chwili początkowej energia mechaniczna walca W2 jest równa jego energii potencjalnej grawitacji. Przyjmujemy, że zero energii potencjalnej jest na poziomie środka masy walca W2, gdy ten jest u podnóża równi. Zatem u podnóża równi energia mechaniczna walca W2 jest równa tylko jego energii kinetycznej całkowitej (ruchu postępowego i obrotowego).

Zapiszemy zasadę zachowania energii mechanicznej:

$$E_{pot \text{ wal}} = E_{kin \text{ wal post}} + E_{kin \text{ wal obr}}$$

Wysokość, na jakiej znajduje się środek masy walca W2 w chwili początkowej, liczona względem poziomu zera energii potencjalnej, przyjmujemy jako  $h$ . Zastosujemy wzory na wymienione rodzaje energii:

$$1) \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_2\omega^2$$

Wykorzystamy związek między prędkością kątową i liniową (dla toczenia się bez poślizgu) oraz wzór na moment bezwładności walca W2. Wyznamy kwadrat prędkości walca u podnóża równi:

$$2) \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(k_2 m R^2) \cdot \frac{v^2}{R^2} \rightarrow gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}k_2 v^2$$

$$3) \quad v^2 = \frac{2gh}{(1 + k_2)}$$



Wykorzystamy związek kinematyczny między przyspieszeniem a drogą i prędkością w ruchu jednostajnie przyspieszonym (siła wypadkowa jest stała) bez prędkości początkowej, drogę powiążemy z wysokością i kątem nachylenia równi:

$$4) \quad v^2 = 2as \quad 5) \quad h = \sin \beta \cdot s$$

Przyrównamy do siebie prawe strony równań 3) i 4) z uwzględnieniem związku 5):

$$6) \quad 2as = \frac{2g \sin \beta \cdot s}{(1 + k_2)} \rightarrow$$

$$7) \quad a = \frac{\sin \beta}{(1 + k_2)} g$$

### Sposób 3. (zastosowanie metody chwilowej osi obrotu)

Rozważmy obrót walca W2 wokół chwilowej osi obrotu. Chwilowa oś obrotu zawiera odcinek stycznej walca z powierzchnią równi w danej chwili. Jedynie siła ciężkości  $\vec{Q}$  walca ma niezerowy moment względem tej osi obrotu (tzn. jej składowa  $\vec{Q}_{\parallel}$  wzdłuż równi).

Ramię tej siły jest równe  $R$ , zatem:

$$1) \quad M_Q = R \cdot Q_{\parallel} \quad \text{gdzie} \quad Q_{\parallel} = mg \sin \beta$$

W metodzie chwilowej osi obrotu rozważamy tylko ruch obrotowy. Zapiszemy równanie wynikające z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego walca względem chwilowej osi obrotu:

$$2a) \quad I_{chw} \epsilon = M_Q \rightarrow I_{chw} \epsilon = R \cdot Q_{\parallel} \rightarrow 2b) \quad I_{chw} \epsilon = R \cdot mg \sin \beta$$

Wyznamy wzór na moment bezwładności walca W2 względem chwilowej osi obrotu (z twierdzenia Steinera):

$$3) \quad I_{chw} = I_2 + mR^2 = k_2 mR^2 + mR^2 = (k_2 + 1)mR^2$$

Do równania 2b) podstawimy zależność 3) oraz zastosujemy związek  $a = \epsilon R$  między przyspieszeniem liniowym a przyspieszeniem kątowym (w przypadku metody chwilowej osi obrotu przyspieszenie liniowe jest przyspieszeniem chwilowym stycznym do chwilowego toru ruchu punktu środka masy walca W2):

$$4) \quad (k_2 + 1)mR^2 \cdot \frac{a}{R} = R \cdot mg \sin \beta \rightarrow (k_2 + 1)a = g \sin \beta$$

$$5) \quad a = \frac{\sin \beta}{(1 + k_2)} g$$



**Zadanie 3.1. (0–1)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.</p> <p>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.</p>	<p>Zdający:</p> <p>VIII.4) (SP) posługuje się pojęciami [...] częstotliwości, długości fali i prędkości rozchodzenia się fali do opisu fal oraz stosuje do obliczeń związki między tymi wielkościami wraz z ich jednostkami.</p> <p>X.6) stosuje prawo odbicia i prawo załamania fal na granicy dwóch ośrodków; posługuje się pojęciem współczynnika załamania ośrodka [...].</p>

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

**Pełne rozwiązanie**

A3

**Zadanie 3.2. (0–3)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.</p> <p>IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych i źródeł internetowych, oraz ocenianie wiarygodności źródeł.</p>	<p>Zdający:</p> <p>I.4) przeprowadza obliczenia liczbowe, posługując się kalkulatorem;</p> <p>I.7) wyodrębnia z tekstów, [...] rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach.</p> <p>X.6) stosuje prawo odbicia i prawo załamania fal na granicy dwóch ośrodków; posługuje się pojęciem współczynnika załamania ośrodka; oblicza kąt graniczny.</p>

### Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda ustalenia biegu wiązki ultradźwięków od granicy powietrze – woda **oraz** zaznaczenie rysunku C.

*Uwaga! Jeżeli zdający stosuje poprawną metodę ustalenia biegu wiązki ultradźwięków od granicy powietrze – woda **oraz** zapisze w sposób jednoznaczny, który rysunek przedstawia opisaną sytuację, albo zapisze jednoznacznie, że zachodzi całkowite odbicie od granicy ośrodków i nie zaznaczy rysunku, to otrzymuje 3 pkt.*

2 pkt – poprawna metoda obliczenia kąta granicznego dla przejścia dźwięku przez granicę powietrze – woda **oraz** podanie prawidłowej wartości tego kąta, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{\sin \alpha_g}{\sin 90^\circ} = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1450 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad \text{oraz} \quad \alpha_g \approx 13,6^\circ$$

**LUB**

– poprawna metoda obliczenia sinusa kąta granicznego dla przejścia dźwięku przez granicę powietrze – woda **oraz** podanie prawidłowej wartości sinusa tego kąta, **oraz** stwierdzenie/zapisanie, że kąt padania (lub sinus tego kąta) jest większy od kąta granicznego, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{\sin \alpha_g}{\sin 90^\circ} = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1450 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad \text{oraz} \quad (\sin \alpha_g \approx 0,2345 \quad \text{zatem} \quad \alpha_g < 45^\circ)$$

albo

$$\frac{\sin \alpha_g}{\sin 90^\circ} = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1450 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad \text{oraz} \quad (\sin \alpha_g \approx 0,2345) < (\sin 45^\circ \approx 0,7071)$$

**LUB**

– poprawna metoda obliczenia kąta załamania dla przejścia dźwięku przez granicę powietrze – woda **oraz** podanie wartości sinusa kąta załamania większej od jedności, **oraz** stwierdzenie, że nie istnieje taki kąt, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{\sin 45^\circ}{\sin \alpha_w} = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1450 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad \text{oraz} \quad (\sin \alpha_w > 1 \quad \text{nie istnieje taki kąt } \alpha_w)$$

1 pkt – poprawne zapisanie warunku (z uwzględnieniem wartości prędkości dźwięku), z którego można obliczyć kąt graniczny dla przejścia dźwięku przez granicę powietrze – woda, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{\sin \alpha_g}{\sin 90^\circ} = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1450 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

**LUB**

– zapisanie warunku (z uwzględnieniem wartości prędkości dźwięku i miary kąta padania) wynikającego z prawa załamania fali, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{\sin 45^\circ}{\sin \alpha_w} = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1450 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania**Sposób 1.

Prędkość dźwięku w powietrzu jest mniejsza od prędkości dźwięku w wodzie. Z tego wynika, że istnieje kąt graniczny  $\alpha_g$  padania dla wiązki ultradźwięków biegnącej od strony powietrza, powyżej którego nastąpi całkowite odbicie od granicy ośrodków powietrze – woda.

Wyznamy kąt graniczny dla przejścia dźwięku przez granicę powietrze – woda. Zapiemy warunek (wynikający z prawa załamania fali) dla kąta granicznego w tym przypadku:

$$\frac{\sin \alpha_g}{\sin 90^\circ} = \frac{v_p}{v_w} \quad \rightarrow \quad \frac{\sin \alpha_g}{1} = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1450 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad \rightarrow \quad \sin \alpha_g \approx 0,2345$$

Obliczymy kąt graniczny przy użyciu kalkulatora naukowego:

$$\sin \alpha_g \approx 0,2345 \quad \text{dla} \quad \alpha_g \approx 13,6^\circ$$

Porównamy kąt padania  $\alpha_p = 45^\circ$  z kątem granicznym:

$$\alpha_p > \alpha_g \quad (45^\circ > 13,6^\circ)$$

Z powyższego wynika, że nastąpi całkowite odbicie od granicy powietrze – woda.

**Prawidłowe zaznaczenie**

C

Sposób 2.

Prędkość dźwięku w powietrzu jest mniejsza od prędkości dźwięku w wodzie. Z tego wynika, że istnieje kąt graniczny  $\alpha_g$  padania dla wiązki ultradźwięków biegnącej od strony powietrza, powyżej którego nastąpi całkowite odbicie od granicy ośrodków powietrze – woda.

Wyznamy sinus kąta granicznego dla przejścia dźwięku przez granicę powietrze – woda. Zapiemy warunek (wynikający z prawa załamania fali) dla sinusa kąta granicznego w tym przypadku:

$$\frac{\sin \alpha_g}{\sin 90^\circ} = \frac{v_p}{v_w} \quad \rightarrow \quad \frac{\sin \alpha_g}{1} = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1450 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad \rightarrow \quad \sin \alpha_g \approx 0,2345$$

Porównamy sinus kąta padania  $\alpha_p = 45^\circ$  z sinusem kąta granicznego:

$$(\sin 45^\circ \approx 0,7071 \quad \text{oraz} \quad \sin \alpha_g \approx 0,2345) \quad \text{zatem} \quad \sin 45^\circ > \sin \alpha_g$$

Ponieważ w przedziale od  $0^\circ$  do  $90^\circ$  sinus jest funkcją rosnącą, to:

$$\sin 45^\circ > \sin \alpha_g \quad \rightarrow \quad (\alpha_p = 45^\circ) > \alpha_g$$

To oznacza, że nastąpi całkowite odbicie od granicy powietrze – woda.

**Prawidłowe zaznaczenie**

C

Sposób 3.

Zapiszemy warunek wynikający z prawa załamania fali na granicy ośrodków powietrze – woda. Z tego warunku wyznaczymy sinus kąta załamania.

Kąt padania wiązki od strony powietrza oznaczmy jako  $\alpha_p$ , a kąt załamania wiązki w wodzie oznaczmy jako  $\alpha_w$ .

$$\frac{\sin \alpha_p}{\sin \alpha_w} = \frac{v_p}{v_w} \quad \rightarrow \quad \frac{\sin 45^\circ}{\sin \alpha_w} = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1450 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad \rightarrow \quad \frac{0,707}{\sin \alpha_w} \approx \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1450 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

Zatem:

$$\sin \alpha_w \approx 3,02 \quad \sin \alpha_w > 1 \quad \text{NIEMOŻLIWE}$$

Ponieważ nie istnieje kąt, dla którego sinus jest większy od jedynki, to nie istnieje w tym przypadku kąt  $\alpha_w$  załamania w wodzie. Z tego wynika, że wiązka ultradźwięków nie wniknie do wody, tylko całkowicie odbije się od granicy powietrze – woda.

**Prawidłowe zaznaczenie**

C

**Zadanie 4.1. (0–2)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.</p> <p>V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.</p>	<p>Zdający:</p> <p>X.1) analizuje rozchodzenie się fal na powierzchni wody i dźwięku w powietrzu na podstawie obrazu powierzchni falowych;</p> <p>X.2) posługuje się pojęciem natężenia fali wraz z jej jednostką (<math>\text{W/m}^2</math>) [...];</p> <p>X.3) opisuje zależność natężenia [...] fali kulistej od odległości od punkowego źródła.</p>

**Zasady oceniania**

2 pkt – poprawna metoda obliczenia natężenia fali kulistej w punkcie  $X$  **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z prawidłową jednostką:

$$I_X \approx 3,2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \quad \text{lub} \quad I_X \approx 3,2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad \text{lub} \quad I_X \approx 3,2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{s}^3}$$

1 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na natężenie fali kulistej w odległości  $r_X$  od źródła z uwzględnieniem symboli wielkości podanych w zadaniu lub poprzez podstawienie wartości liczbowych, np. zapisy równoważne poniższym:

$$I_X = \frac{E}{\Delta t \cdot 4\pi r_X^2} \quad \text{lub} \quad I_X = \frac{40 \text{ mJ}}{1 \text{ s} \cdot 4\pi \cdot 10^2 \text{ m}^2}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Skorzystamy z definicji natężenia fali oraz z warunku zadania, że fala kulista rozchodzi się tak samo we wszystkich kierunkach i nie jest pochłaniana. Zatem energia przechodząca w jednostce czasu przez dowolną sferę ze źródłem fali w jej środku, jest taka sama. Zatem:

$$I = \frac{E}{\Delta t \cdot S} \quad \rightarrow \quad I_X = \frac{E}{\Delta t \cdot 4\pi r_X^2}$$

Obliczymy natężenie fali w punkcie X:

$$I_X = \frac{40 \text{ mJ}}{1 \text{ s} \cdot 4\pi \cdot 10^2 \text{ m}^2} = \frac{10}{\pi} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2} \frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \approx 3,2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2}$$

**Zadanie 4.2. (0–3)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.  V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.	Zdający: VIII.4) (SP) posługuje się pojęciami [...] częstotliwości, długości fali i prędkości rozchodzenia się fali do opisu fal oraz stosuje do obliczeń związki między tymi wielkościami wraz z ich jednostkami. X.9) stosuje zasadę superpozycji fal; wyjaśnia zjawisko interferencji fal; podaje warunki wzmocnienia oraz wygaszenia się fal.

**Zasady oceniania**

3 pkt – poprawna metoda ustalenia, czy w punkcie A nastąpi wzmocnienie czy osłabienie interferencyjne (tzn. poprawne obliczenie długości fali i zastosowanie warunków na wzmocnienie/osłabienie) **oraz** zapisanie poprawnej odpowiedzi:

*W punkcie A nastąpi osłabienie interferencyjne*

2 pkt – poprawna metoda obliczenia długości fali, tzn. zapisanie związku między długością fali a jej prędkością i częstotliwością z poprawnie podstawionymi wartościami liczbowymi (lub zastosowanymi symbolami) **oraz** zapisanie / wykorzystanie / sprawdzenie warunków na maksymalne wzmocnienie i maksymalne osłabienie interferencyjne, np. zapisy równoważne poniższym:

$$340 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \lambda \cdot 850 \text{ Hz} \quad \text{oraz}$$

$$r_2 - r_1 = \frac{2n \pm 1}{2} \lambda \quad (\text{osłabienie}) \quad r_2 - r_1 = n\lambda \quad (\text{wzmocnienie})$$

albo (obliczenie różnicy dróg fal jako krotności połowy lub pełnej długości fali)

$$\lambda = 0,4 \text{ m} \quad \text{oraz} \quad \left( 11,5 \text{ m} - 10,5 \text{ m} = 1 = \frac{5}{2} \cdot 0,4 \text{ m} \quad \text{lub} \quad \frac{11,5}{0,4} - \frac{10,5}{0,4} = \frac{5}{2} \right)$$

albo (obliczenie różnicy faz jako krotności  $\pi$  lub  $2\pi$ )

$$\lambda = 0,4 \text{ m} \quad \text{oraz} \quad 2\pi \cdot \frac{11,5 \text{ m}}{0,4 \text{ m}} - 2\pi \cdot \frac{10,5 \text{ m}}{0,4 \text{ m}} = 5\pi (= 2,5 \cdot 2\pi)$$

albo (określenie faz docierających do punktu A)

$$r_1 = 26\lambda + \frac{1}{4}\lambda \quad \leftrightarrow \quad \phi_1 = 26 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$r_2 = 28\lambda + \frac{3}{4}\lambda \quad \leftrightarrow \quad \phi_2 = 28 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}$$

**LUB**

- poprawna metoda obliczenia okresu fali **oraz** poprawna metoda obliczenia obu czasów dotarcia ustalonej fazy fali od każdego z głośników do punktu A **oraz** zapisanie / wykorzystanie / sprawdzenie warunków na maksymalne wzmocnienie i maksymalne osłabienie interferencyjne, zapisanych poprzez okres i czasy, np. zapisy równoważne poniższym:

$$T = \frac{1}{850} \text{ s} \quad \text{oraz} \quad t_1 = \frac{r_1}{v_d} \quad \text{oraz} \quad t_2 = \frac{r_2}{v_d} \quad \text{oraz} \quad \frac{t_2}{T} - \frac{t_1}{T} = 2,5$$

- 1 pkt – poprawna metoda obliczenia długości fali, tzn. zapisanie związku między długością fali a jej prędkością i częstotliwością z poprawnie podstawionymi wartościami liczbowymi (lub zastosowanymi symbolami), np. zapisy równoważne poniższym:

$$340 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \lambda \cdot 850 \text{ Hz}$$

**LUB**

- zapisanie (może być słowne) / wykorzystanie / sprawdzenie warunków na maksymalne wzmocnienie i maksymalne osłabienie interferencyjne (z długością fali  $\lambda$  i odległościami  $r_2$  i  $r_1$  lub z fazami i odległościami lub z czasami i okresem), np. zapisy równoważne poniższym:

$$\text{jeśli } r_2 - r_1 = \frac{2n \pm 1}{2} \lambda \quad \text{to nastąpi maksymalne osłabienie}$$

$$\text{jeśli } r_2 - r_1 = n\lambda \quad \text{to nastąpi maksymalne wzmocnienie}$$

albo

$$\text{jeśli } \frac{2\pi}{\lambda} r_2 - \frac{2\pi}{\lambda} r_1 = (2n \pm 1) \cdot \pi \quad \text{to nastąpi maksymalne osłabienie}$$

$$\text{jeśli } \frac{2\pi}{\lambda} r_2 - \frac{2\pi}{\lambda} r_1 = n \cdot 2\pi \quad \text{to nastąpi maksymalne wzmocnienie}$$

**Uwaga!** Zapisanie warunków z samymi fazami (np.  $\phi_2 - \phi_1 = (2n \pm 1) \cdot \pi$ ), bez użycia wzoru na fazę, jest niewystarczające do spełnienia tego kryterium.

albo (opis słowny)

Jeśli do punktu A dotrą fale przeciwne w fazie, to nastąpi maksymalne osłabienie

Jeśli do punktu A dotrą fale zgodne w fazie, to nastąpi maksymalne wzmocnienie

albo

$$\text{jeśli } t_2 - t_1 = \frac{2n \pm 1}{2} T \quad \text{to nastąpi maksymalne osłabienie}$$

$$\text{jeśli } t_2 - t_1 = nT \quad \text{to nastąpi maksymalne wzmocnienie}$$

- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania**Sposób 1. (zastosowanie warunku z różnicą odległości)

Zapiszemy warunki na maksymalne wzmocnienie interferencyjne oraz maksymalne osłabienie interferencyjne fali w punkcie  $A$ .

Jeśli  $r_1$  i  $r_2$  są odległościami od punktu  $A$  do – odpowiednio – pierwszego ( $G_1$ ) i drugiego ( $G_2$ ) źródła fali oraz  $\lambda$  jest długością fali, to:

$$\text{jeśli } r_2 - r_1 = \frac{2n \pm 1}{2} \lambda \quad \text{to nastąpi maksymalne osłabienie w } A$$

$$\text{jeśli } r_2 - r_1 = n\lambda \quad \text{to nastąpi maksymalne wzmocnienie w } A$$

Powyższe warunki zastosujemy dla danych zadania.

Obliczymy długość fal dźwiękowych wysyłanych z głośników  $G_1$  i  $G_2$ :

$$v_d = \lambda f \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{v_d}{f} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{850 \frac{1}{\text{s}}} = 0,4 \text{ m}$$

Sprawdzymy – zgodnie z podanymi warunkami – czy w punkcie  $A$  zachodzi maksymalne (możliwe dla tego punktu) osłabienie czy wzmocnienie interferencyjne.

W tym celu obliczymy różnicę odległości punktu  $A$  od głośników  $G_1$  i  $G_2$  i wyrazimy ją poprzez krotność długości fali lub krotność połowy długości fali.

$$r_2 - r_1 = 11,5 \text{ m} - 10,5 \text{ m} = 1 \text{ m}$$

$$r_2 - r_1 = \frac{5}{2} \cdot 0,4 \text{ m} = \frac{5}{2} \lambda$$

Różnica odległości punktu  $A$  od głośników  $G_1$  i  $G_2$  wyraża się poprzez nieparzystą krotność połowy długości fali. Zgodnie z podanymi warunkami w punkcie  $A$  nastąpi maksymalne (możliwe dla tego punktu) osłabienie interferencyjne.

Sposób 2. (zastosowanie warunku z różnicą faz)

Zapiszemy warunki na maksymalne wzmocnienie interferencyjne oraz maksymalne osłabienie interferencyjne fali w punkcie  $A$ .

Jeśli  $\phi_1$  i  $\phi_2$  są fazami fal docierających do punktu  $A$  – odpowiednio – od pierwszego ( $G_1$ ) i od drugiego ( $G_2$ ) źródła fali, to:

$$\text{jeśli } |\phi_2 - \phi_1| = (2n \pm 1) \cdot \pi \quad \text{to nastąpi maksymalne osłabienie}$$

$$\text{jeśli } |\phi_2 - \phi_1| = n \cdot 2\pi \quad \text{to nastąpi maksymalne wzmocnienie}$$

Użyjemy wzorów do wyznaczenia obu faz. Rozważamy fazy fal docierających do punktu  $A$  w chwili  $t$ . Różnica faz źródeł  $G_1$  i  $G_2$  wynosi zero. Zatem:

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1 \quad \text{oraz} \quad \phi_2 = \frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2 \quad \rightarrow$$

$$|\phi_2 - \phi_1| = \frac{2\pi}{\lambda} r_2 - \frac{2\pi}{\lambda} r_1 = 2\pi \left( \frac{r_2}{\lambda} - \frac{r_1}{\lambda} \right)$$

Obliczmy długość fal dźwiękowych wysyłanych z głośników G1 i G2:

$$v_d = \lambda f \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{v_d}{f} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{850 \frac{1}{\text{s}}} = 0,4 \text{ m}$$

Podstawimy długość fali do wzoru na różnicę faz

$$|\phi_2 - \phi_1| = 2\pi \left( \frac{11,5 \text{ m}}{0,4 \text{ m}} - \frac{10,5 \text{ m}}{0,4 \text{ m}} \right) = 2\pi \cdot \frac{1}{0,4} = 2\pi \cdot \frac{5}{2} = 5\pi$$

Różnica faz docierających do punktu A jest równa nieparzystej krotności  $\pi$ .

Zgodnie z podanymi warunkami w punkcie A nastąpi maksymalne (możliwe dla tego punktu) osłabienie interferencyjne.

### Sposób 3. (zastosowanie warunku z różnicą faz)

Jeśli  $\phi_1$  i  $\phi_2$  są fazami fal docierających do punktu A – odpowiednio – od pierwszego (G1) i od drugiego (G2) źródła fali, to:

- w punkcie A nastąpi maksymalne wzmocnienie interferencyjne, gdy fazy docierających fal będą zgodne
- w punkcie A nastąpi maksymalne osłabienie interferencyjne, gdy fazy docierających fal będą przeciwne.

Zatem zbadamy, jakie fazy docierają od źródeł G1 i G2 do punktu A w wybranej chwili  $t$ .

Założymy dla uproszczenia rozważań, że faza początkowa źródeł w chwili  $t$  wynosi 0.

Zbadamy, jak zmieni się faza wzdłuż każdej z dróg. Zauważmy, że na drodze równej długości fali  $\lambda$  następuje zmiana fazy fali o  $2\pi$ :

$$\lambda \leftrightarrow 2\pi$$

czyli:

$$\lambda = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{850 \frac{1}{\text{s}}} = 0,4 \text{ m} \quad \leftrightarrow \quad 2\pi$$

Zatem:

$$\begin{aligned} r_1 = 10,5 \text{ m} &= 26,25\lambda = 26\lambda + \frac{1}{4}\lambda \quad \leftrightarrow \quad \phi_1 = 26 \cdot 2\pi + \frac{1}{4} \cdot 2\pi = 26 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} \\ r_2 = 11,5 \text{ m} &= 28,75\lambda = 28\lambda + \frac{3}{4}\lambda \quad \leftrightarrow \quad \phi_2 = 28 \cdot 2\pi + \frac{3}{4} \cdot 2\pi = 28 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Do punktu A od głośnika G1 dotrze fala o fazie  $\frac{\pi}{2}$ , a od głośnika G2 dotrze fala o fazie  $\frac{3}{2}\pi$ .

Zatem dotrą fale o przeciwnych fazach. Nastąpi maksymalne osłabienie interferencyjne.



Sposób 4. (zastosowanie warunku z różnicą czasów)

Zapišemy warunki na maksymalne wzmocnienie interferencyjne oraz maksymalne osłabienie interferencyjne fali w punkcie  $A$ .

Założmy, że  $t_1$  i  $t_2$  są czasami, w jakich dotrą ustalone fazy fal – odpowiednio – od pierwszego i drugiego głośnika do punktu  $A$ . Jeśli  $r_1$  i  $r_2$  są odległościami od punktu  $A$  do – odpowiednio – pierwszego ( $G_1$ ) i drugiego ( $G_2$ ) źródła fali oraz  $\lambda$  jest długością fali, to:

$$\text{jeśli } v_d t_2 - v_d t_1 = \frac{2n \pm 1}{2} v_d T \quad \text{to nastąpi maksymalne osłabienie w } A$$

$$\text{jeśli } v_d t_2 - v_d t_1 = n v_d T \quad \text{to nastąpi maksymalne wzmocnienie w } A$$

Powyższe warunki zapiszemy w przekształconej postaci:

$$\text{jeśli } \frac{t_2}{T} - \frac{t_1}{T} = \frac{2n \pm 1}{2} \quad \text{to nastąpi maksymalne osłabienie w } A$$

$$\text{jeśli } \frac{t_2}{T} - \frac{t_1}{T} = n \quad \text{to nastąpi maksymalne wzmocnienie w } A$$

Obliczymy  $t_1$  i  $t_2$  oraz  $T$ :

$$t_1 = \frac{r_1}{v_d} = \frac{10,5}{340} \text{ s} \approx 0,03088 \text{ s} \quad t_2 = \frac{r_2}{v_d} = \frac{11,5}{340} \text{ s} \approx 0,03382 \text{ s} \quad T = \frac{1}{850 \text{ Hz}} \approx 0,00118 \text{ s}$$

Zatem:

$$\frac{t_2}{T} - \frac{t_1}{T} \approx \frac{0,03382 \text{ s}}{0,00118 \text{ s}} - \frac{0,03088 \text{ s}}{0,00118 \text{ s}} \approx 2,5 = \frac{5}{2} \quad \left( t_2 - t_1 = \frac{5}{2} T \right)$$

Różnica czasów dotarcia faz fal do punktu  $A$  od głośników  $G_1$  i  $G_2$  wyraża się poprzez nieparzystą krotność połowy okresu. Zgodnie z podanymi warunkami w punkcie  $A$  nastąpi maksymalne (możliwe dla tego punktu) osłabienie interferencyjne.

**Zadanie 5.1. (0–2)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych i źródeł internetowych, oraz ocenianie wiarygodności źródeł.</p> <p>I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.</p>	<p>Zdający:</p> <p>I.7) wyodrębnia z tekstów, [...] rysunków schematycznych [...] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; [...].</p> <p>II.13) stosuje zasady dynamiki do opisu zachowania się ciał.</p> <p>IV.1) posługuje się prawem powszechnego ciążenia do opisu oddziaływania grawitacyjnego [...];</p> <p>IV.3) analizuje jakościowo wpływ siły grawitacji Słońca na niejednostajny ruch planet po orbitach eliptycznych [...];</p> <p>IV.5) [...] stosuje do obliczeń III prawo Keplera dla orbit kołowych i eliptycznych.</p>

### Zasady oceniania

2 pkt – poprawne zaznaczenia w trzech stwierdzeniach.

1 pkt – poprawne zaznaczenia w dwóch stwierdzeniach.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

### Pełne rozwiązanie

PFF

#### Zadanie 5.2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych i źródeł internetowych, oraz ocenianie wiarygodności źródeł.  II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.7) wyodrębnia z tekstów, [...] rysunków schematycznych [...] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; [...]. III.6) posługuje się pojęciem momentu pędu punktu materialnego [...]; III.7) stosuje zasadę zachowania momentu pędu. IV.6) interpretuje II prawo Keplera jako konsekwencję zasady zachowania momentu pędu.

### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

### Pełne rozwiązanie

A2

#### Zadanie 5.3. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych i źródeł internetowych, oraz ocenianie wiarygodności źródeł.  II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.2) posługuje się [...] kartą wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych; I.7) wyodrębnia z tekstów, [...] rysunków schematycznych [...] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; [...]. IV.5) [...] stosuje do obliczeń III prawo Keplera dla orbit kołowych i eliptycznych.

**Zasady oceniania**

3 pkt – poprawna metoda obliczenia okresu obiegu Chirona dookoła Słońca **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką:  $T_C \approx 51 \text{ lat}$

2 pkt – poprawna metoda obliczenia okresu obiegu Chirona dookoła Słońca, tzn.: wykorzystanie równania III prawa Keplera (dla Chirona i Ziemi) z uwzględnieniem okresów obiegu Chirona i Ziemi dookoła Słońca, półosi wielkiej orbity Chirona, promienia orbity Ziemi **oraz** poprawna metoda obliczenia długości półosi wielkiej orbity eliptycznej Chirona, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{T_C^2}{a_C^3} = \frac{T_Z^2}{a_Z^3} \quad \text{oraz} \quad 2a_C = r_P + r_A$$

albo

$$\frac{T_C^2}{\left(\frac{8,5 \text{ au} + 18,9 \text{ au}}{2}\right)^3} = \frac{(1 \text{ rok})^2}{(1 \text{ au})^3}$$

1 pkt – zapisanie równania III prawa Keplera (dla Chirona i Ziemi) z uwzględnieniem (np. poprzez oznaczenia lub wartości danych liczbowych) okresów obiegu Chirona i Ziemi dookoła Słońca, półosi wielkiej orbity Chirona, promienia orbity Ziemi, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{T_C^2}{a_C^3} = \frac{T_Z^2}{a_Z^3} \quad \text{albo} \quad \frac{T_C^2}{a_C^3} = \frac{(1 \text{ rok})^2}{(1 \text{ au})^3}$$

**LUB**

– poprawna metoda obliczenia długości półosi wielkiej orbity eliptycznej Chirona, np. zapisy równoważne poniższym:

$$2a_C = r_P + r_A$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Chiron oraz Ziemia obiegają Słońce – wspólne centrum grawitacyjne. Zatem okres obiegu Chirona dookoła Słońca obliczymy z III prawa Keplera:

$$\frac{T_C^2}{a_C^3} = \frac{T_Z^2}{a_Z^3} \quad \rightarrow \quad T_C = \sqrt{\left(\frac{a_C}{a_Z}\right)^3} \cdot T_Z$$

gdzie  $a_C$  jest długością półosi wielkiej dla okołosłonecznej, eliptycznej orbity Chirona,  $a_Z$  jest promieniem dla okołosłonecznej, kołowej orbity Ziemi,  $T_C$  i  $T_Z$  są okresami obiegu – odpowiednio – Chirona i Ziemi dookoła Słońca.

Obliczymy  $a_C$ :

$$a_C = \frac{r_P + r_A}{2} \quad \rightarrow \quad a_C = \frac{8,5 \text{ au} + 18,9 \text{ au}}{2} = 13,7 \text{ au}$$

Podstawimy dane do równania wynikającego z III prawa Keplera:

$$T_C = \sqrt{\left(\frac{13,7 \text{ au}}{1 \text{ au}}\right)^3} \cdot 1 \text{ rok} \approx 51 \text{ lat}$$

### Zadanie 6.1. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.</p> <p>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.</p>	<p>Zdający:</p> <p>I.7) wyodrębnia z [...] wykresów [...] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach.</p> <p>VI.8) stosuje pierwszą zasadę termodynamiki do analizy przemian gazowych; rozróżnia przemiany: izotermiczną, izobaryczną, izochoryczną [...] gazów;</p> <p>VI.10) opisuje związek między temperaturą w skali Kelvina a [...] energią wewnętrzną gazu doskonałego;</p> <p>VI.11) analizuje wykresy przemian gazu doskonałego.</p>

#### Zasady oceniania

2 pkt – poprawne zaznaczenia w trzech stwierdzeniach.

1 pkt – poprawne zaznaczenia w dwóch stwierdzeniach.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

#### Pełne rozwiązanie

PFP

### Zadanie 6.2. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.</p> <p>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.</p>	<p>Zdający:</p> <p>I.6) tworzy [...] wykresy [...] dla zilustrowania zjawisk bądź problemu [...];</p> <p>I.7) wyodrębnia z [...] wykresów [...] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach.</p> <p>VI.8) [...] rozróżnia przemiany: izotermiczną, izobaryczną, izochoryczną [...] gazów;</p> <p>VI.11) analizuje wykresy przemian gazu doskonałego;</p> <p>VI.12) stosuje równanie gazu doskonałego (równanie Clapeyrona) do wyznaczenia parametrów gazu.</p>

#### Zasady oceniania

Rozwiązanie będzie podlegało ocenie, gdy zdający spełni co najmniej jeden z poniższych warunków lub ich kombinację, określoną dalej w schemacie punktowania.

**Warunek VB** [wyznaczenie  $V_B$ ]:

zapisanie równania wynikającego z równań Clapeyrona dla stanów  $B$  i  $A$  **lub** stwierdzenie (słownie bądź zapisem matematycznym) że przemiana  $A \rightarrow B$  jest izochoryczna **oraz** wyznaczenie (poprzez  $V_1$ ) prawidłowej objętości gazu w stanie  $B$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$\left( \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{3p_1 V_B}{3T_1} \text{ lub } V_A = V_B \text{ lub } A \rightarrow B \text{ jest izochoryczna} \right) \text{ oraz } V_B = V_1$$

**Warunek VC** [wyznaczenie  $V_C$ ]:

zapisanie równania wynikającego z równań Clapeyrona dla stanów  $C$  i  $A$  lub skorzystanie z własności przemiany izobarycznej ( $V \propto T$ ) **oraz** wyznaczenie (poprzez  $V_1$ ) prawidłowej objętości gazu w stanie  $C$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$\left( \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_1 V_C}{3T_1} \text{ lub } V \propto T \text{ lub } C \rightarrow A \text{ jest izobaryczna} \right) \text{ oraz } V_C = 3V_1$$

**Warunek VX1** [wyznaczenie  $V_X$  sposobem 1.]:

zapisanie równania wynikającego z równań Clapeyrona dla stanów  $X$  i  $A$  **oraz** wyznaczenie (poprzez  $V_1$ ) prawidłowej objętości gazu w stanie  $X$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{2p_1 V_X}{3T_1} \text{ oraz } V_X = \frac{3}{2} V_1$$

**Warunek 2\_równania:**

zapisanie dwóch równań wynikających z równań Clapeyrona dla par stanów:  $B$  i  $A$  lub  $C$  i  $A$  lub  $X$  i  $A$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$\text{dwa równania spośród: } \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_B V_B}{T_B} \text{ lub } \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_C V_C}{T_C} \text{ lub } \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_X V_X}{T_X}$$

**Warunek Punkty\_ABC:**

poprawne zaznaczenie na wykresie ( $V, p$ ) stanów  $A, B, C$  (niezależnie od poprawności linii łączących stany lub ich braku, nie musi być żadnych obliczeń).

**Warunek Wykres\_ABCX**

poprawne zaznaczenie na wykresie ( $V, p$ ) stanów  $A, B, C, X$  **oraz** narysowanie poprawnej zależności ciśnienia  $p$  od objętości  $V$  (z uwzględnieniem kształtu izoterm, tzn. łuku przechodzącego przez punkt  $X$  w cyklu przemian  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ ).

**Warunek VX2** [wyznaczenie  $V_X$  sposobem 2.]

zapisanie równania wynikającego z równań Clapeyrona dla stanów  $X$  i  $B$  lub skorzystanie z własności przemiany izotermicznej ( $V \propto \frac{1}{p}$ ) **oraz** wyznaczenie (poprzez  $V_1$ ) prawidłowej objętości gazu w stanie  $X$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$\left( p_B V_B = p_X V_X \text{ lub } V \propto \frac{1}{p} \text{ lub } B \rightarrow X \text{ jest izotermiczna} \right) \text{ oraz } V_X = \frac{3}{2} V_1$$

**Warunek VX3** [wyznaczenie  $V_X$  sposobem 3.]

zapisanie równania wynikającego z równań Clapeyrona dla stanów  $X$  i  $C$  lub skorzystanie z własności przemiany izotermicznej ( $V \propto \frac{1}{p}$ ) **oraz** wyznaczenie (poprzez  $V_1$ ) prawidłowej objętości gazu w stanie  $X$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$\left( p_C V_C = p_X V_X \text{ lub } V \propto \frac{1}{p} \text{ lub } X \rightarrow C \text{ jest izotermiczna} \right) \text{ oraz } V_X = \frac{3}{2} V_1$$

**Schemat punktowania**

4 pkt – spełnienie warunku **VB** **oraz** warunku **VC** **oraz** warunku (**VX1** lub **VX2** lub **VX3**) **oraz** warunku **Wykres\_ABCX**.

3 pkt – spełnienie warunku **VB** **oraz** warunku **VC** **oraz** warunku **Punkty\_ABC**

**LUB**

– spełnienie warunku **VB** **oraz** warunku **VC** **oraz** warunku (**VX1** lub **VX2** lub **VX3**)

**LUB**

– spełnienie warunku **Wykres\_ABCX** **oraz** warunku (**VX1** lub **VX2** lub **VX3**)

2 pkt – spełnienie warunku **VB** **oraz** warunku **VC**

**LUB**

– spełnienie warunku **VB** **oraz** warunku (**VX1** lub **VX2**)

**LUB**

– spełnienie warunku **VC** **oraz** warunku (**VX1** lub **VX3**)

**LUB**

– spełnienie warunku **Wykres\_ABCX** (bez spełnienia innych warunków, bez żadnych obliczeń)

**LUB**

– spełnienie warunku **Punkty\_ABC** **oraz** warunku (**VB** lub **VC**)

1 pkt – spełnienie warunku **VB**

**LUB**

– spełnienie warunku **VC**

**LUB**

– spełnienie warunku **VX1**

**LUB**

– spełnienie warunku **2\_równania**

**LUB**

– spełnienie warunku **Punkty\_ABC** (bez spełnienia innych warunków, bez żadnych obliczeń)

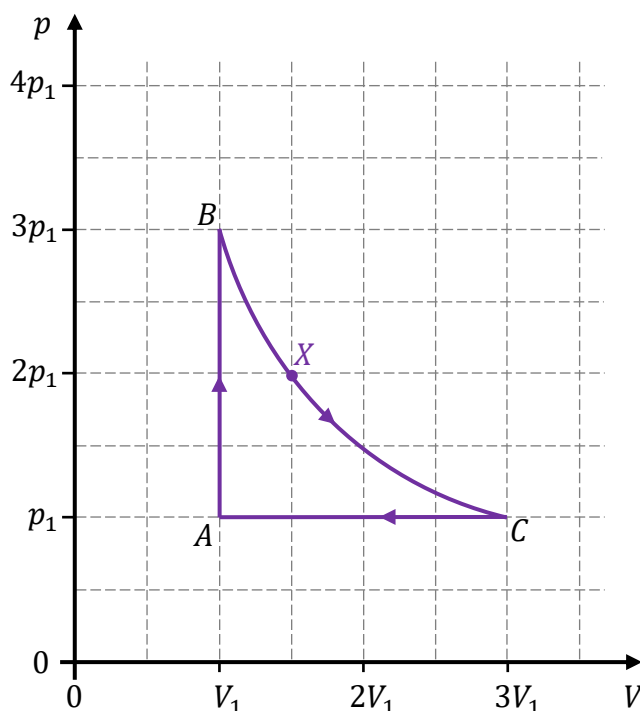
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga dodatkowa**

Warunek **Wykres\_ABCX** nie będzie uznany jako spełniony, jeżeli zamiast linii w postaci łuku łączącego punkty  $BXC$ , będzie to krzywa łamana złożona z odcinków prostych  $BX$  oraz  $XC$ .

## Przykładowe pełne rozwiązanie

Wykres 2.



Stan A ma na wykresie współrzędne:

$$A = (V_A; p_A) = (V_1; p_1)$$

Współrzędne stanu  $B = (V_B; p_B)$  wyrazimy – odpowiednio – za pomocą  $V_1$  i  $p_1$ .

Z równań Clapeyrona dla stanów A i B oraz z wykresu 1. wynika, że:

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_B V_B}{T_B} \quad \text{gdzie} \quad (p_B = 3p_1 \quad \text{oraz} \quad T_B = 3T_1) \quad \text{zatem}$$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{3p_1 V_B}{3T_1} \quad \rightarrow \quad V_B = V_1 \quad \rightarrow \quad B = (V_B; p_B) = (V_1; 3p_1)$$

Współrzędne stanu  $C = (V_C; p_C)$  wyrazimy – odpowiednio – za pomocą  $V_1$  i  $p_1$ . Z równań Clapeyrona dla stanów A i C oraz z wykresu 1. wynika, że:

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_C V_C}{T_C} \quad \text{gdzie} \quad (p_C = p_1 \quad \text{oraz} \quad T_C = 3T_1) \quad \text{zatem}$$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_1 V_C}{3T_1} \quad \rightarrow \quad V_C = 3V_1 \quad \rightarrow \quad C = (V_C; p_C) = (3V_1; p_1)$$

Dalej wyznaczmy objętość  $V_X$  stanu X. Można to zrobić na trzy różne sposoby.

### Sposób 1. wyznaczenia $V_X$

Współrzędne stanu  $X = (V_X; p_X)$  wyrazimy – odpowiednio – za pomocą  $V_1$  i  $p_1$ . Z równań Clapeyrona dla stanów  $A$  i  $X$  oraz z wykresu 1. wynika, że:

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_X V_X}{T_X} \quad \text{gdzie} \quad (p_X = 2p_1 \quad \text{oraz} \quad T_X = 3T_1) \quad \text{zatem}$$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{2p_1 V_X}{3T_1} \quad \rightarrow \quad V_X = \frac{3}{2} V_1 \quad \rightarrow \quad X = (V_X; p_X) = \left( \frac{3}{2} V_1; 2p_1 \right)$$

### Sposób 2. wyznaczenia $V_X$

Współrzędne stanu  $X = (V_X; p_X)$  wyrazimy – odpowiednio – za pomocą  $V_1$  i  $p_1$ . Z równań Clapeyrona dla stanów  $B$  i  $X$  oraz z wykresu 1. oraz z własności przemiany izotermicznej  $B \rightarrow C$  wynika, że:

$$p_B V_B = p_X V_X \quad \text{gdzie} \quad (p_B = 3p_1 \quad \text{oraz} \quad V_B = V_1 \quad \text{oraz} \quad p_X = 2p_1) \quad \text{zatem}$$

$$3p_1 V_1 = 2p_1 V_X \quad \rightarrow \quad V_X = \frac{3}{2} V_1 \quad \rightarrow \quad X = (V_X; p_X) = \left( \frac{3}{2} V_1; 2p_1 \right)$$

### Sposób 3. wyznaczenia $V_X$

Współrzędne stanu  $X = (V_X; p_X)$  wyrazimy – odpowiednio – za pomocą  $V_1$  i  $p_1$ . Z równań Clapeyrona dla stanów  $C$  i  $X$  oraz z wykresu 1. oraz z własności przemiany izotermicznej  $B \rightarrow C$  wynika, że:

$$p_C V_C = p_X V_X \quad \text{gdzie} \quad (p_C = p_1 \quad \text{oraz} \quad V_C = 3V_1 \quad \text{oraz} \quad p_X = 2p_1) \quad \text{zatem}$$

$$p_1 \cdot 3V_1 = 2p_1 V_X \quad \rightarrow \quad V_X = \frac{3}{2} V_1 \quad \rightarrow \quad X = (V_X; p_X) = \left( \frac{3}{2} V_1; 2p_1 \right)$$

## Zadanie 6.3. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.</p> <p>V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.</p>	<p>Zdający:</p> <p>VI.8) stosuje pierwszą zasadę termodynamiki do analizy przemian gazowych; rozróżnia przemiany: izotermiczną, izobaryczną, izochoryczną [...] gazów;</p> <p>VI.11) analizuje wykresy przemian gazu doskonałego;</p> <p>VI.13) posługuje się pojęciem ciepła molowego gazu; interpretuje związek między ciepłem molowym przy stałym ciśnieniu a ciepłem molowym w stałej objętości dla gazu doskonałego;</p> <p>VI.14) analizuje przepływ energii w postaci ciepła i pracy mechanicznej w silnikach i pompach cieplnych.</p>



**Zasady oceniania**

2 pkt – poprawna metoda obliczenia ciepła oddanego w cyklu **oraz** zapisanie poprawnego wyrażenia na ciepło oddane:  $|Q_{CA}| = 5nRT_1$

1 pkt – identyfikacja ciepła oddanego przez gaz jako ciepła wymienionego z otoczeniem w przemianie  $C \rightarrow A$  **oraz** zapisanie związku między ciepłem pobranym w przemianie izobarycznej  $C \rightarrow A$  a przyrostem temperatury  $\Delta T_{CA}$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$|Q_{odd}| = |Q_{CA}| \quad \text{oraz} \quad |Q_{CA}| = |nC_p \Delta T_{CA}|$$

**LUB**

– identyfikacja ciepła oddanego przez gaz jako ciepła wymienionego z otoczeniem w przemianie  $C \rightarrow A$  **oraz** zapisanie I zasady termodynamiki dla przemiany  $C \rightarrow A$  z poprawnym uwzględnieniem konwencji znaków energii lub z poprawnym zastosowaniem wzoru na pracę albo zmianę energii wewnętrznej

$$|Q_{odd}| = |Q_{CA}| \quad \text{oraz} \quad (-|\Delta U_{CA}| = -|Q_{CA}| + |W_{CA}| \quad \text{lub} \quad \Delta U_{CA} = Q_{CA} - p\Delta V \quad \text{lub} \\ \text{lub} \quad nC_V \Delta T_{CA} = Q_{CA} + W_{CA})$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania**Sposób 1. (zastosowanie wzoru na ciepło w przemianie izobarycznej)

Obliczymy ciepło oddane przez gaz w cyklu. Gaz oddaje ciepło tylko w przemianie  $C \rightarrow A$  (izobarycznej):

$$1) \quad Q_{odd} = Q_{CA}$$

Do wyznaczenia  $|Q_{CA}|$  zastosujemy wzór na ciepło wymienione w przemianie izobarycznej:

$$2) \quad |Q_{CA}| = |nC_p \Delta T_{CA}|$$

Zastosujemy związek między ciepłem molowym przy stałej objętości a ciepłem molowym przy stałym ciśnieniu:

$$3) \quad C_p = C_V + R = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R$$

Do równania 2) podstawimy związek 3) oraz przyrost temperatury  $\Delta T_{CA}$  odczytany z wykresu 1.:

$$4) \quad |Q_{CA}| = \left| n \frac{5}{2} R (T_1 - 3T_1) \right| = 5nRT_1$$

Sposób 2. (zastosowanie I zasady termodynamiki)

Obliczymy ciepło oddane przez gaz w cyklu. Gaz oddaje ciepło tylko w przemianie  $C \rightarrow A$  (izobarycznej):

$$1) \quad Q_{odd} = Q_{CA}$$

Do wyznaczenia  $|Q_{CA}|$  zastosujemy I zasadę termodynamiki. Zastosujemy konwencję, zgodnie z którą, gdy gaz traci energię w postaci pracy lub ciepła, to zapisujemy ją ze znakiem minus, a gdy zyskuje energię w postaci pracy lub ciepła, to zapisujemy ją ze znakiem plus.

Podczas sprężania izobarycznego gaz oddaje do otoczenia energię w postaci ciepła i jednocześnie zyskuje z zewnątrz energię w postaci pracy wykonanej nad układem. Ponadto uwzględnimy od razu, że zmiana energii wewnętrznej jest ujemna, ponieważ temperatura w przemianie izobarycznej  $C \rightarrow A$  zmalała. Zapiszemy I zasadę termodynamiki:

$$2a) \quad -|\Delta U_{CA}| = -|Q_{CA}| + |W_{CA}| \quad \rightarrow \quad 2b) \quad |Q_{CA}| = |W_{CA}| + |\Delta U_{CA}|$$

W równaniu 2b) uwzględnimy wzór na pracę oraz energię wewnętrzną

$$3) \quad |Q_{CA}| = p|\Delta V_{CA}| + nC_V|\Delta T_{CA}|$$

W równaniu 3) uwzględnimy równanie stanu gazu doskonałego:

$$4) \quad |Q_{CA}| = nR|\Delta T_{CA}| + nC_V|\Delta T_{CA}|$$

Do równania 4) podstawimy ciepło  $C_V = \frac{3}{2}R$  oraz przyrost temperatury  $\Delta T_{CA}$  odczytany z wykresu 1.:

$$5) \quad |Q_{CA}| = nR \cdot 2T_1 + n\frac{3}{2}R \cdot 2T_1 = 5nRT_1$$

### Zadanie 7.1. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>III. Planowanie i przeprowadzanie obserwacji oraz doświadczeń i wnioskowanie na podstawie ich wyników.</p> <p>I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.</p>	<p>Zdający:</p> <p>I.7) wyodrębnia z [...] rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach.</p> <p>IX.12) (SP) doświadcza: a) demonstruje [...] powstawanie obrazów za pomocą zwierciadeł płaskich i soczewek.</p> <p>X.16) rysuje konstrukcyjnie obrazy wytworzone przez soczewki; stosuje do obliczeń równanie soczewki;</p> <p>X.18) doświadcza: [...] f) bada związek między ogniskową soczewki a położeniami przedmiotu i obrazu.</p>

### Zasady oceniania

2 pkt – poprawne zaznaczenia w trzech stwierdzeniach.

1 pkt – poprawne zaznaczenia w dwóch stwierdzeniach.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

### Pełne rozwiązanie

PPF

**Zadanie 7.2. (0–3)**

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.6) tworzy [...] rysunki schematyczne lub blokowe dla zilustrowania zjawisk bądź problemu [...]; I.7) wyodrębnia z [...] rysunków schematycznych [...] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach. X.16) rysuje konstrukcyjnie obrazy wytworzone przez soczewki; stosuje do obliczeń równanie soczewki.

**Zasady oceniania**

Rozwiązanie będzie podlegało ocenie, gdy zdający spełni co najmniej jeden z poniższych warunków lub ich kombinację, określoną dalej w schemacie punktowania.

**Warunek  $S_{\text{KONSTR}}$**  – poprawne wyznaczenie konstrukcyjne położenia soczewki  $S$  za pomocą promienia charakterystycznego biegnącego przez środek soczewki (w rozwiązaniu to promień oznaczony jako  $P_1$ ).

**Warunek  $S_{\text{BEZ}}$**  – poprawne oznaczenie położenia soczewki  $S$  bez konstrukcji promieniem charakterystycznym.

**Warunek  $F_{\text{KONSTR}}$**  – poprawne wyznaczenie konstrukcyjne lewego lub prawego ogniska soczewki za pomocą promienia charakterystycznego biegnącego równolegle do osi optycznej po prawej lub po lewej stronie poprawnie wyznaczonej soczewki i przechodzącego przez ognisko (w rozwiązaniu są to promienie oznaczone jako  $P_3$  lub  $P_2$ ).

**Warunek  $F_{\text{BEZ}}$**  – poprawne oznaczenie położenia ogniska  $F$  bez konstrukcji promieniem charakterystycznym.

**Warunek  $f$**  – wpisanie prawidłowej wartości liczbowej dla ogniskowej.

**Schemat punktowania**

3 pkt – spełnienie warunku  $S_{\text{KONSTR}}$  **oraz** warunku  $F_{\text{KONSTR}}$  **oraz** warunku  $f$ .

2 pkt – spełnienie warunku  $S_{\text{KONSTR}}$  **oraz** warunku  $F_{\text{KONSTR}}$

**LUB**

– spełnienie warunku  $S_{\text{BEZ}}$  **oraz** warunku  $F_{\text{KONSTR}}$  **oraz** warunku  $f$

**LUB**

– spełnienie warunku  $S_{\text{KONSTR}}$  **oraz** warunku  $F_{\text{BEZ}}$  **oraz** warunku  $f$

1 pkt – spełnienie warunku  $S_{\text{KONSTR}}$

**LUB**

– spełnienie warunku  $S_{\text{BEZ}}$  **oraz** warunku  $F_{\text{KONSTR}}$

**LUB**

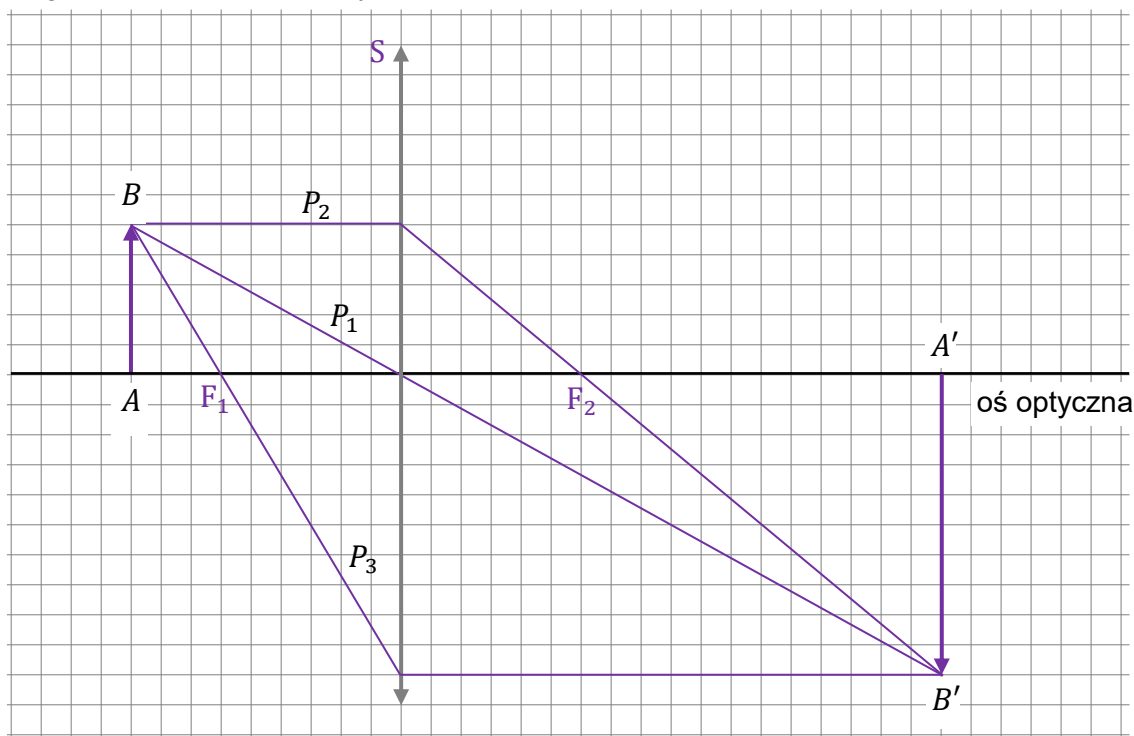
– spełnienie warunku  $S_{\text{BEZ}}$  **oraz** warunku  $f$ .

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

### Uwaga dodatkowa!

Nie ocenia się zapisów w brudnopisie pod zadaniem (np. niekonstrukcyjnych, algebraicznych sposobów wyznaczenia odległości przedmiotu i obrazu od soczewki lub wyznaczenia ogniskowej).

### Przykładowe pełne rozwiązanie



$$f = \dots 6 \dots \text{ cm}$$

### Zadanie 8. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.</p> <p>I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.</p>	<p>Zdający:</p> <p>I.6) tworzy [...] rysunki schematyczne lub blokowe dla zilustrowania zjawisk bądź problemu [...];</p> <p>I.7) wyodrębnia z [...] rysunków schematycznych lub [...] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach.</p> <p>IX.1) posługuje się pojęciem pola magnetycznego; rysuje linie pola magnetycznego w pobliżu [...] przewodników z prądem (przewodnik prostoliniowy [...]);</p> <p>IX.2) posługuje się pojęciem wektora indukcji magnetycznej wraz z jego jednostką [...];</p> <p>IX.6) stosuje do obliczeń związki wartości indukcji pola magnetycznego i natężenia prądu dla prostoliniowego przewodnika [...].</p>

**Zasady oceniania**

3 pkt – poprawne oznaczenie, w którą stronę płynie prąd w przewodniku **oraz** narysowanie wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}_2$  w punkcie  $P_2$  o poprawnym kierunku, poprawnym zwrocie i wartości równej 2 umowne jednostki wartości indukcji magnetycznej.

2 pkt – poprawne oznaczenie, w którą stronę płynie prąd w przewodniku **oraz** narysowanie wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}_2$  w punkcie  $P_2$  o poprawnym kierunku, poprawnym zwrocie i wartości mniejszej od 8 umownych jednostek wartości indukcji magnetycznej (ale różnej od poprawnej wartości 2 jednostek)

**LUB**

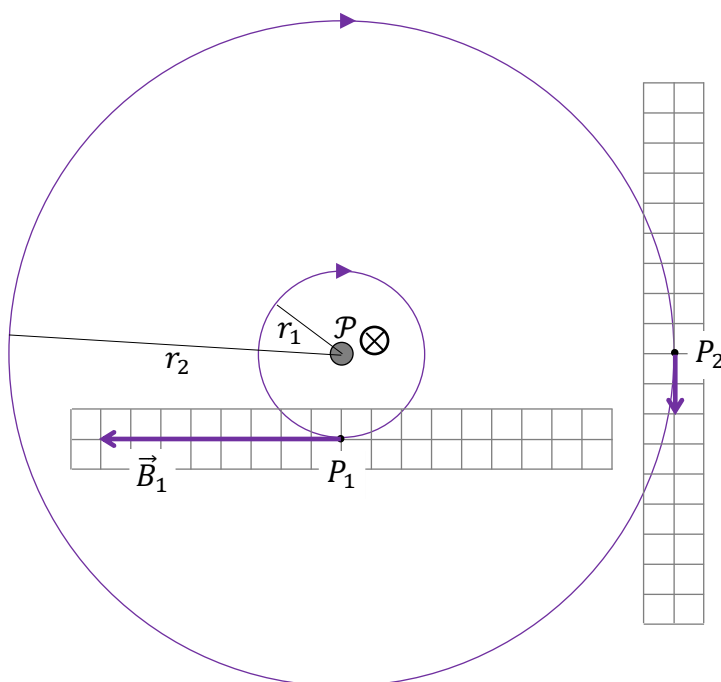
– narysowanie wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}_2$  w punkcie  $P_2$  o poprawnym kierunku, poprawnym zwrocie i wartości równej 2 umowne jednostki wartości indukcji magnetycznej.

1 pkt – poprawne oznaczenie, w którą stronę płynie prąd w przewodniku

**LUB**

– narysowanie wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}_2$  w punkcie  $P_2$  o poprawnym kierunku, poprawnym zwrocie i wartości mniejszej od 8 umownych jednostek wartości indukcji magnetycznej (ale różnej od poprawnej wartości 2 jednostek).

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

**Pełne rozwiązanie**

### Zadanie 9.1. (0–1)

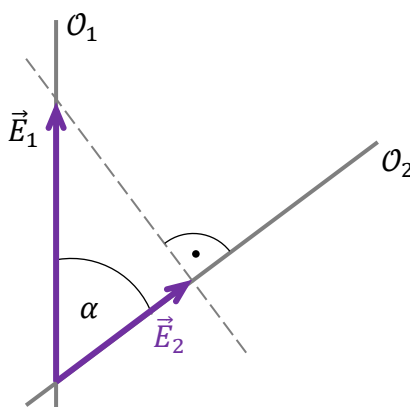
Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.</p> <p>V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.</p>	<p>Zdający:</p> <p>I.5) rozróżnia wielkości wektorowe i skalarne, wykonuje graficznie działania na wektorach ([...] rozkładanie na składowe);</p> <p>I.6) tworzy [...] rysunki schematyczne lub blokowe dla zilustrowania zjawisk bądź problemu [...];</p> <p>I.7) wyodrębnia z tekstów, [...] rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska [...].</p> <p>VII.3) posługuje się wektorem natężenia pola elektrycznego [...].</p> <p>IX.14) opisuje [...] rozchodzenie się fal elektromagnetycznych.</p> <p>X.13) rozróżnia fale poprzeczne i podłużne; opisuje światło jako falę elektromagnetyczną poprzeczną; rozróżnia światło spolaryzowane i niespolaryzowane; analizuje polaryzację światła po przejściu przez polaryzator, wynikającą z poprzecznego charakteru fali elektromagnetycznej;</p> <p>X.18) doświadczalnie: a) obserwuje zmiany natężenia światła po przejściu przez dwa polaryzatory, których osie polaryzacji tworzą różne kąty.</p>

### Zasady oceniania

1 pkt – narysowanie wektora  $\vec{E}_2$  o poprawnym kierunku, poprawnym zwrocie i prawidłowej wartości.

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

### Rozwiązanie



**Zadanie 9.2. (0–2)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>III. Planowanie i przeprowadzanie obserwacji oraz doświadczeń i wnioskowanie na podstawie ich wyników.</p> <p>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.</p>	<p>Zdający:</p> <p>I.7) wyodrębnia z tekstów, [...] rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska [...].</p> <p>VII.3) posługuje się wektorem natężenia pola elektrycznego [...].</p> <p>IX.14) opisuje [...] rozchodzenie się fal elektromagnetycznych.</p> <p>X.2) posługuje się pojęciem natężenia fali [...] oraz proporcjonalnością do kwadratu amplitudy;</p> <p>X.13) rozróżnia fale poprzeczne i podłużne; opisuje światło jako falę elektromagnetyczną poprzeczną; rozróżnia światło spolaryzowane i niespolaryzowane; analizuje polaryzację światła po przejściu przez polaryzator, wynikającą z poprzecznego charakteru fali elektromagnetycznej;</p> <p>X.18) doświadcza: a) obserwuje zmiany natężenia światła po przejściu przez dwa polaryzatory, których osie polaryzacji tworzą różne kąty.</p>

**Zasady oceniania**

2 pkt – poprawne zaznaczenia w trzech stwierdzeniach.

1 pkt – poprawne zaznaczenia w dwóch stwierdzeniach.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

**Pełne rozwiązanie**

PPP

**Zadanie 10. (0–3)**

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.2) posługuje się materiałami pomocniczymi, w tym [...] kartą wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych; I.15) przeprowadza obliczenia i zapisuje wynik zaokrąglony do zadanej liczby cyfr znaczących. XII.2) posługuje się związkiem między energią całkowitą, masą cząstki i jej prędkością; posługuje się pojęciem energii spoczynkowej; XII.3) opisuje równowagę masy i energii spoczynkowej.

**Zasady oceniania**

- 3 pkt – poprawna metoda obliczenia energii spoczynkowej cząstki **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego wyrażonego w keV zaokrąglonego do trzech cyfr znaczących:  $E_0 \approx 511 \text{ keV}$  (uwzględnia się także wynik  $E_0 \approx 510 \text{ keV}$ )
- 2 pkt – zapisanie/wyprowadzenie poprawnego związku między energią kinetyczną cząstki a jej prędkością i energią spoczynkową (z którego można bezpośrednio obliczyć energię spoczynkową) **oraz** poprawne uwzględnienie warunku zadania  $v = \frac{1}{2}c$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$E_{kin} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} - E_0$$

- 1 pkt – zapisanie związku między energią całkowitą cząstki a jej masą (albo energią spoczynkową) i prędkością **oraz** zapisanie związku między energią całkowitą a energią kinetyczną i energią spoczynkową, np. zapisy równoważne poniższym:

$$E = E_{kin} + E_0 \quad \text{oraz} \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

albo w jednym równaniu

$$E_{kin} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - E_0$$

- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Zapiszemy związek między energią  $E$  całkowitą cząstki a jej energią spoczynkową  $E_0$  i energią kinetyczną  $E_{kin}$ :

$$1) \quad E = E_{kin} + E_0$$



Wyprowadzimy związek między energią całkowitą a energią spoczynkową. W tym celu zastosujemy związek między energią całkowitą cząstki a jej masą i prędkością oraz związek między energią spoczynkową cząstki a jej masą:

$$2) \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \text{oraz} \quad E_0 = mc^2 \quad \rightarrow$$

$$3) \quad E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Wyrażenie 3) na energię całkowitą podstawimy do wzoru 1):

$$4) \quad \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = E_{kin} + E_0$$

Podstawimy dane zadania i obliczymy energię spoczynkową cząstki:

$$5) \quad \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = 79,05 \text{ keV} + E_0 \quad \rightarrow$$

$$6) \quad E_0 = \frac{79,05 \text{ keV}}{\left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0,25}} - 1\right)} = 510,98 \dots \text{ keV} \approx 511 \text{ keV}$$

**Uwaga!** W pkt 6) przedstawiono obliczenie z zaokrągleniem wyniku na końcu. Poniżej przedstawiamy rachunek z zaokrągleniami wykonywanymi w obliczeniach pośrednich (w obliczeniach pośrednich zaokrąglamy do co najmniej 4 cyfr znaczących):

$$\frac{E_0}{\sqrt{1 - 0,25}} = 79,05 \text{ keV} + E_0 \quad \rightarrow \quad \frac{E_0}{0,8660} - E_0 \approx 79,05 \text{ keV}$$

$$0,1547E_0 = 79,05 \text{ keV} \quad \rightarrow \quad E_0 \approx 510,9 \dots \text{ keV} \approx 511 \text{ keV}$$

### Zadanie 11.1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.</p> <p>I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.</p>	<p>Zdający:</p> <p>VIII.4) (SP) posługuje się pojęciami [...] częstotliwości, długości fali i prędkości rozchodzenia się fali do opisu fal oraz stosuje do obliczeń związku między tymi wielkościami wraz z ich jednostkami.</p> <p>XI.2) [...] posługuje się pojęciem fotonu oraz oblicza jego energię;</p> <p>XI.5) [...] stosuje zasadę zachowania energii [...] do opisu emisji i absorpcji przez swobodne atomy [...].</p>

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

#### Pełne rozwiązanie

B1

### Zadanie 11.2. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.</p> <p>V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.</p>	<p>Zdający:</p> <p>I.2) posługuje się [...] kartą wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych.</p> <p>VIII.4) (SP) posługuje się pojęciami [...] częstotliwości, długości fali i prędkości rozchodzenia się fali do opisu fal oraz stosuje do obliczeń związku między tymi wielkościami wraz z ich jednostkami.</p> <p>XI.2) [...] posługuje się pojęciem fotonu oraz oblicza jego energię;</p> <p>XI.4) [...] oblicza różnice energii między poziomami energetycznymi w atomie wodoru;</p> <p>XI.5) [...] stosuje zasadę zachowania energii [...] do opisu emisji i absorpcji przez swobodne atomy [...].</p>

**Zasady oceniania**

3 pkt – poprawna metoda obliczenia energii emitowanego fotonu **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego wyrażonego w eV:

$$E_{42} = 2,55 \text{ eV}$$

2 pkt – zapisanie zasady zachowania energii z uwzględnieniem energii atomu wodoru w stanie  $n = 4$ , w stanie  $n = 2$  i energii  $E_{42}$  emitowanego fotonu **oraz** zastosowanie wzorów na energię atomu wodoru w stanie  $n = 4$  i w stanie  $n = 2$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$E_{42} = \frac{E_1}{4^2} - \frac{E_1}{2^2} \quad \text{lub} \quad E_{42} = -13,6 \text{ eV} \cdot \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{2^2} \right)$$

1 pkt – zapisanie zasady zachowania energii dla układu atom – foton z uwzględnieniem (poprzez oznaczenie) energii atomu wodoru w stanie  $n = 4$ , energii atomu wodoru w stanie  $n = 2$  i energii emitowanego fotonu (oznaczonej jako np.  $E_{42}$  lub  $E_{fot}$ ), np. zapisy równoważne poniższym:

$$E_{42} = E_4 - E_2 \quad \text{lub} \quad E_4 = E_2 + E_{42}$$

**LUB**

– poprawne obliczenie energii atomu wodoru w stanie  $n = 4$  albo w stanie  $n = 2$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$\text{wystarczy zapis } E_4 \approx -0,85 \text{ eV} \quad \text{lub} \quad \text{akceptowalny zapis } E_4 = -\frac{13,6}{4^2} \text{ eV}$$

albo

$$\text{wystarczy zapis } E_2 \approx -3,4 \text{ eV} \quad \text{lub} \quad \text{akceptowalny zapis } E_2 = -\frac{13,6}{2^2} \text{ eV}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Energię atomu wodoru w stanie  $n = 4$  oznaczmy jako  $E_4$ , a energię atomu wodoru w stanie  $n = 2$  oznaczmy jako  $E_2$ . Energię emitowanego fotonu oznaczmy jako  $E_{42}$ .

Wykorzystamy zasadę zachowania energii dla układu atom – foton. Zgodnie z powyższymi oznaczeniami oraz zgodnie z założeniem zadania energia układu w stanie początkowym jest równa energii układu w stanie końcowym (energię kinetyczną odrzutu atomu pomijamy):

$$1) \quad E_4 = E_2 + E_{42} \quad \rightarrow$$

$$2) \quad E_{42} = E_4 - E_2$$

Wykorzystamy wzór na energię atomu wodoru znajdującego się na  $n$ -tym poziomie (stanie) energetycznym:

$$3) \quad E_{42} = \frac{E_1}{4^2} - \frac{E_1}{2^2} \quad \rightarrow$$

$$4) \quad E_{42} \approx \frac{-13,606 \text{ eV}}{4^2} - \frac{-13,606 \text{ eV}}{2^2} = 2,551 \dots \text{ eV} \approx 2,55 \text{ eV}$$

### Zadanie 12.1. (0–2)

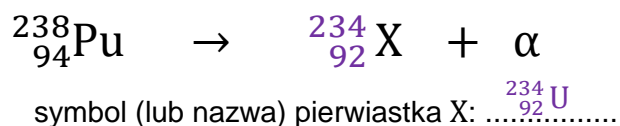
Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych i źródeł internetowych, oraz ocenianie wiarygodności źródeł.</p> <p>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.</p>	<p>Zdający:</p> <p>I.2) posługuje się [...] tablicami fizycznymi i chemicznymi oraz kartą wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych.</p> <p>XII.5) posługuje się pojęciami pierwiastek, jądro atomowe, izotop, proton, neutron, elektron; opisuje skład jądra atomowego na podstawie liczb masowej i atomowej;</p> <p>XII.6) zapisuje reakcje jądrowe, stosując zasadę zachowania liczby nukleonów i zasadę zachowania ładunku;</p> <p>XII.9) [...] opisuje rozpady alfa [...].</p>

### Zasady oceniania

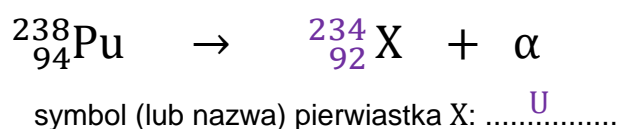
- 2 pkt – poprawne uzupełnienie schematu równania rozpadu  $\alpha$  jądra plutonu  ${}^{238}_{94}\text{Pu}$ , tzn. wpisanie właściwych liczb atomowej i masowej **oraz** zapisanie symbolu lub nazwy pierwiastka, którego jądro powstaje:  ${}^{234}_{92}\text{U}$  albo **U** albo **uran**
- 1 pkt – poprawne uzupełnienie schematu równania rozpadu  $\alpha$  jądra plutonu  ${}^{238}_{94}\text{Pu}$ , tzn. wpisanie właściwych liczb atomowej i masowej powstałego jądra **LUB**
- poprawne zapisanie symbolu lub nazwy pierwiastka X: **uran** albo **U** albo  ${}^{234}_{92}\text{U}$
- 0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

### Pełne rozwiązanie

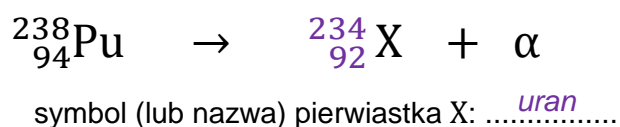
#### Sposób 1.



#### Sposób 2.



#### Sposób 3.



**Zadanie 12.2. (0–3)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.</p> <p>IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych i źródeł internetowych, oraz ocenianie wiarygodności źródeł.</p>	<p>Zdający:</p> <p>II.15) wykorzystuje zasadę zachowania pędu do opisu zachowania się izolowanego układu ciał;</p> <p>II.20) posługuje się pojęciami [...] energii kinetycznej [...].</p> <p>XII.5) posługuje się pojęciami pierwiastek, jądro atomowe [...];</p> <p>XII.9) [...] opisuje rozpady alfa [...].</p>

**Zasady oceniania**

3 pkt – poprawna metoda obliczenia ilorazu energii kinetycznych jądra X i cząstki  $\alpha$  **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego:  $\frac{E_{kin X}}{E_{kin \alpha}} = \frac{1}{58,5}$  albo  $\frac{E_{kin X}}{E_{kin \alpha}} \approx 0,017$

2 pkt – poprawne zapisanie zasady zachowania pędu układu (przed i po rozpadzie jądra  ${}^{238}_{94}\text{Pu}$ ) z uwzględnieniem wartości pędów jądra X i cząstki  $\alpha$  i z uwzględnieniem zwrotów prędkości/pędów jądra X i cząstki  $\alpha$  **oraz** poprawne zapisanie stosunku energii kinetycznych jądra X i cząstki  $\alpha$  z uwzględnieniem wzorów na energie kinetyczne, np. zapisy równoważne poniższym:

$$m_X v_X - m_\alpha v_\alpha = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{E_{kin X}}{E_{kin \alpha}} = \frac{m_X v_X^2}{m_\alpha v_\alpha^2}$$

albo

$$p_X - p_\alpha = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{E_{kin X}}{E_{kin \alpha}} = \frac{\frac{p_X^2}{2m_X}}{\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha}}$$

1 pkt – poprawne zapisanie zasady zachowania pędu układu (przed i po rozpadzie jądra  ${}^{238}_{94}\text{Pu}$ ) z uwzględnieniem wartości pędów jądra X i cząstki  $\alpha$  i z uwzględnieniem zwrotów prędkości/pędów jądra X i cząstki  $\alpha$ , np. zapisy równoważne poniższym:

$$m_X v_X - m_\alpha v_\alpha = 0 \quad (\text{lub} \quad m_X v_X = m_\alpha v_\alpha) \quad \text{albo} \quad p_X - p_\alpha = 0 \quad (\text{lub} \quad p_X = p_\alpha)$$

**LUB**

– poprawne zapisanie stosunku energii kinetycznych jądra X i cząstki  $\alpha$  z uwzględnieniem wzorów na energie kinetyczne, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{E_{kin X}}{E_{kin \alpha}} = \frac{\frac{m_X v_X^2}{2}}{\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}} \quad \text{albo} \quad \frac{E_{kin X}}{E_{kin \alpha}} = \frac{\frac{p_X^2}{2m_X}}{\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha}}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

## Przykładowe pełne rozwiązania

### Sposób 1.

Zapišemy wyrażenie pozwalające wyznaczyć iloraz energii kinetycznych jądra X i cząstki  $\alpha$ :

$$1) \quad \frac{E_{kin X}}{E_{kin \alpha}} = \frac{\frac{1}{2} m_X v_X^2}{\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2} = \frac{m_X v_X^2}{m_\alpha v_\alpha^2}$$

Obliczymy stosunek prędkości tych jąder. W tym celu skorzystamy z zasady zachowania pędu. Pęd układu przed rozpadem (pęd jądra  ${}^{238}_{94}\text{Pu}$ ) jest równy zero, a pęd układu po rozpadzie jest równy wektorowej sumie pędów jądra X i cząstki  $\alpha$ :

$$2) \quad \vec{p}_{\text{Pu}} = \vec{p}_X + \vec{p}_\alpha \quad \rightarrow \quad 3) \quad 0 = m_X v_X - m_\alpha v_\alpha \quad \rightarrow \quad 4) \quad \frac{v_X}{v_\alpha} = \frac{m_\alpha}{m_X}$$

Równanie uzyskane w pkt 4) podstawimy do wzoru w pkt 1) i w ten sposób wyznaczmy stosunek energii kinetycznych jądra X i cząstki  $\alpha$  w zależności od ich mas:

$$5) \quad \frac{E_{kin X}}{E_{kin \alpha}} = \frac{m_X}{m_\alpha} \cdot \left(\frac{v_X}{v_\alpha}\right)^2 = \frac{m_X}{m_\alpha} \cdot \left(\frac{m_\alpha}{m_X}\right)^2 = \frac{m_\alpha}{m_X}$$

Do prawej strony równania podstawimy dane liczbowe:

$$6) \quad \frac{E_{kin X}}{E_{kin \alpha}} = \frac{1}{58,5} \approx 0,017$$

### Sposób 2.

Zapišemy wyrażenie pozwalające wyznaczyć iloraz energii kinetycznych jądra X i cząstki  $\alpha$ :

$$1) \quad \frac{E_{kin X}}{E_{kin \alpha}} = \frac{\frac{p_X^2}{2m_X}}{\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha}}$$

Skorzystamy z zasady zachowania pędu. Pęd układu przed rozpadem jest równy zero, a pęd układu po rozpadzie jest równy wektorowej sumie pędów jądra X i cząstki  $\alpha$ :

$$2) \quad \vec{p}_{\text{Pu}} = \vec{p}_X + \vec{p}_\alpha \quad \rightarrow \quad 3) \quad 0 = p_X - p_\alpha \quad \rightarrow \quad 4) \quad p_X = p_\alpha$$

Równanie uzyskane w pkt 4) wykorzystamy we wzorze w pkt 1) i w ten sposób wyznaczmy stosunek energii kinetycznych jądra X i cząstki  $\alpha$  w zależności od ich mas:

$$5) \quad \frac{E_{kin X}}{E_{kin \alpha}} = \frac{\frac{p_X^2}{2m_X}}{\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha}} = \frac{\frac{1}{2m_X}}{\frac{1}{2m_\alpha}} = \frac{m_\alpha}{m_X}$$

Do prawej strony równania podstawimy dane liczbowe:

$$6) \quad \frac{E_{kin X}}{E_{kin \alpha}} = \frac{1}{58,5} \approx 0,017$$

**Zadanie 12.3. (0–3)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.</p> <p>IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych i źródeł internetowych, oraz ocenianie wiarygodności źródeł.</p> <p>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.</p>	<p>Zdający:</p> <p>I.4) przeprowadza obliczenia liczbowe, posługując się kalkulatorem;</p> <p>I.15) [...] zapisuje wynik zaokrąglony do zadanej liczby cyfr znaczących.</p> <p>II.20) posługuje się pojęciami [...] mocy [...].</p> <p>VI.2) rozróżnia przekaz energii w postaci ciepła między układami o różnych temperaturach i przekaz energii w formie pracy.</p> <p>XII.12) opisuje rozpad izotopu promieniotwórczego; posługuje się pojęciem czasu połowicznego rozpadu; oblicza liczbę jąder izotopu promieniotwórczego, które pozostają w próbce po dowolnym czasie [...].</p>

**Zasady oceniania**

3 pkt – poprawna metoda obliczenia czasu połowicznego rozpadu izotopu plutonu  ${}^{238}_{94}\text{Pu}$  **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego wyrażonego w latach i zaokrąglonego do dwóch cyfr znaczących:  $T \approx 88 \text{ lat}$

*Uwaga! W tym zadaniu, jeśli zdający stosuje poprawną metodę i otrzymuje wynik liczbowy w latach, pozostawiając go niezaokrąglonym do dwóch cyfr znaczących, to może otrzymać 3 pkt pod warunkiem, że ten wynik po zaokrągleniu dałby wartość  $T \approx 88 \text{ lat}$ .*

2 pkt – poprawne zapisanie jednego równania, z którego bezpośrednio można obliczyć  $T$ , wynikającego z prawa rozpadu promieniotwórczego i warunku zadania **oraz** prawidłowe uwzględnienie danych liczbowych w tym równaniu, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{96,13 \text{ J/s}}{100 \text{ J/s}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5 \text{ lat}}{T}} \quad \text{albo} \quad 0,9613 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5 \text{ lat}}{T}}$$

**LUB**

– poprawne zapisanie jednego równania, z którego bezpośrednio można obliczyć  $T$ , wynikającego z prawa rozpadu promieniotwórczego i warunku zadania **oraz** przekształcenie tego równania i wyznaczenie  $\frac{t}{T}$ :

$$\frac{P_t}{P_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \quad \rightarrow \quad \frac{t}{T} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{P_t}{P_0}\right)$$

1 pkt – poprawne zapisanie równania prawa rozpadu promieniotwórczego (z uwzględnieniem poprzez oznaczenie czasu połowicznego rozpadu) **oraz** poprawne zapisanie/wykorzystanie warunku zadania o proporcjonalności mocy cieplnej do liczby jąder, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{N_t}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \quad \text{oraz} \quad \frac{P_t}{P_0} = \frac{N_t}{N_0}$$

albo (w jednym równaniu)

$$\frac{P_t}{P_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \quad \text{albo} \quad P(t) \propto \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązanie

Z prawa rozpadu promieniotwórczego wynika, że:

$$1) \quad \frac{N_t}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

gdzie  $N_0$  jest liczbą jąder izotopu plutonu  ${}^{238}_{94}\text{Pu}$  w próbce  $Z$  w chwili  $t_0 = 0$ , a  $N_t$  jest liczbą jąder izotopu plutonu  ${}^{238}_{94}\text{Pu}$  w tej próbce w chwili  $t$ . Ponieważ moc cieplna wytwarzana przez próbkę  $Z$  jest wprost proporcjonalna do liczby jąder izotopu plutonu  ${}^{238}_{94}\text{Pu}$  pozostających w próbce  $Z$ , to:

$$2) \quad \frac{P_t}{P_0} = \frac{N_t}{N_0}$$

Z równań 1) i 2) wynika, że

$$3) \quad \frac{P_t}{P_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

Podstawimy dane liczbowe zadania i rozwiążemy równanie względem  $T$ :

- przykładowy sposób 1. prowadzenia rachunku

$$4) \quad \frac{96,13 \text{ J/s}}{100 \text{ J/s}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5 \text{ lat}}{T}} \rightarrow 0,9613 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5 \text{ lat}}{T}}$$

$$5) \quad \frac{5 \text{ lat}}{T} = \log_{\frac{1}{2}} 0,9613 \quad \xrightarrow{\text{kalkulator naukowy}}$$

$$6) \quad T = \frac{5 \text{ lat}}{\log_{\frac{1}{2}} 0,9613} = 87,80 \dots \text{ lat} \approx 88 \text{ lat}$$

- przykładowy sposób 2. prowadzenia rachunku

$$4) \quad \frac{96,13 \text{ J/s}}{100 \text{ J/s}} = 2^{-\frac{5 \text{ lat}}{T}} \rightarrow \frac{100 \text{ J/s}}{96,13 \text{ J/s}} = 2^{\frac{5 \text{ lat}}{T}}$$

$$5) \quad \frac{5 \text{ lat}}{T} \approx \log_2 1,04026 \quad \xrightarrow{\text{kalkulator naukowy}}$$

$$6) \quad T = \frac{5 \text{ lat}}{\log_2 1,04026} = 87,80 \dots \text{ lat} \approx 88 \text{ lat}$$



- przykładowy sposób 3. prowadzenia rachunku

$$4) \quad \frac{96,13 \text{ J/s}}{100 \text{ J/s}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5 \text{ lat}}{T}} \rightarrow 0,9613 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5 \text{ lat}}{T}}$$

$$5) \quad \log_{10} 0,9613 = \log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5 \text{ lat}}{T}} \rightarrow$$

$$\log_{10} 0,9613 = \frac{5 \text{ lat}}{T} \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{2}\right) \quad \xrightarrow{\text{kalkulator naukowy}}$$

$$6) \quad T = 5 \text{ lat} \cdot \frac{\log_{10} 0,5}{\log_{10} 0,9613} = 87,80 \dots \text{ lat} \approx 88 \text{ lat}$$